Wie groß ist die Fläche eines Kreises?

Diese Frage hat schon die Ägypter 2000 v. Chr. beschäftigt. Dieses Exponat soll helfen, selbst eine Antwort zu finden, die häufig als eine Näherung verwendet werden kann. Mittels „geschicktem" Umlegen von Sektoren eines zugrunde gelegten Kreises erkennt man, dass der Flächeninhalt des Kreises annähernd so groß ist wie der einer Parallelogramm-ähnlichen Fläche (im Folgenden kurz „Parallelogramm" genannt, vgl. Abb.3). Man erhält auf diese Weise zwar keine explizite Formel für den Flächeninhalt eines Kreises, aber eine „gute" Approximation des Zusammenhangs zwischen Umfang und Flächeninhalt eines Kreises.

Und nun…

…die Mathematik dazu:

Zunächst zerlegt man den gegebenen Kreis in n deckungsgleiche Kreissektoren. Dabei sollte n gerade sein (für ungerade n würde ein analoges Vorgehen, allerdings mit einem Trapez statt einem Parallelogramm, zum selben Ergebnis führen). In unserem Beispiel wurde n = 12 gewählt.

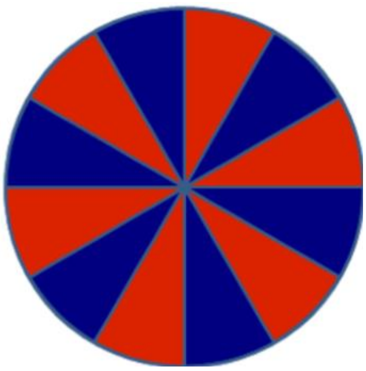

Abb.1

Jeder dieser Sektoren hat folgendes Aussehen:

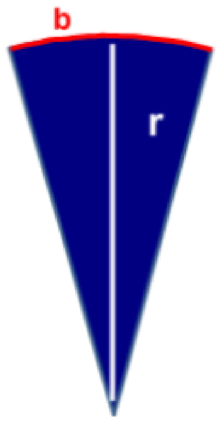

Abb.2

Wer sich mit dem Exponat beschäftigt, stellt rasch fest, dass man mit einfachem „Probieren“ oder gar „Gewalt“ bei der Aufgabe, den Flächeninhalt des Kreises zumindest näherungsweise zu bestimmen, nicht weiterkommt. Es gibt aber eine gute näherungsweise Lösung. Diese sieht so aus:

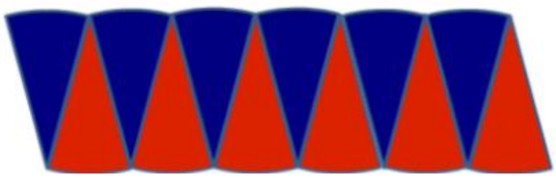

Abb.3

Sinnvollerweise sucht man nun Zusammenhänge zwischen dem zugrundeliegenden Kreis und dem zugeordneten Parallelogramm (Abb.3).

Es gilt:

- dass der Kreis und das Parallelogramm den gleichen Flächeninhalt haben,
- dass die Summe der Längen der beiden größeren Seiten des Parallelogramms näherungsweise gleich dem Umfang des Kreises ist.

Warum?

- Wenn die Sektoren im Kreis liegen (Abb.1), entspricht der Umfang des Kreises dem Produkt aus der Anzahl *n* (hier im Beispiel n = 12) der Sektoren mit der Bogenlänge *b* eines Sektors (Abb.2).

- Wenn die Sektoren im Parallelogramm liegen, bilden jeweils $\frac{n}{2}$ Bögen der Länge *b* näherungsweise die obere bzw. die untere Kante des Parallelogramms. Die Strecken sind zwar nicht identisch, sind aber näherungsweise für die hier betrachteten Überlegungen vergleichbar. Die Annäherung ist natürlich umso genauer, je größer die Anzahl *n* der Sektoren ist.

- Die Höhe des Parallelogramms ist gleich dem Radius *r* des Kreises (vgl. Abb.2 und 3).

Fasst man diese Überlegungen zusammen, so ergibt sich für den Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt} &= \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Kreisumfang} \cdot \text{Radius.}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Formel für die Kreisfläche:

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r.$$

Dieses Ergebnis kann man jetzt mit dem von dem Exponat [„Was ist Pi?“] zusammenbringen. Dort erfährt man nämlich, dass

$$\pi = \frac{\text{Umfang}}{\text{Durchmesser}} = \frac{u}{2r}$$

Mit $u = 2r \cdot \pi$ erhält man also insgesamt

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot r^2,$$

was der bekannten Formel der Kreisfläche entspricht.