

Musikalisches Würfelspiel

Es war der (heutzutage nahezu unbekannt) Komponist und Musikwissenschaftler Johann Philipp Kirnberger (1721 - 1783), der 1757 durch seine Veröffentlichung „Der allezeit fertige Polonoisen – und Menuettenkomponist“ musikalische Würfelspiele als beliebten Zeitvertreib in Mode brachte. Zuvor hatte der zweite Sohn Johann Sebastian Bachs, Carl Philipp Emanuel Bach (1714 -1788), mit seiner Schrift „Einfall, einen doppelten Contrapunct in der Octave von sechs Tacten zu machen, ohne die Regeln davon zu wissen“ die Idee verwirklicht, den Zufall beim Komponieren einzubeziehen.

Das bekannteste derartige musikalische Würfelspiel wird Wolfgang Amadeus Mozart (1756-91) zugeschrieben. Seine „Anleitung so viel Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componiren so viel man will ohne musikalisch zu seyn noch etwas von der Composition zu verstehen“ wurde 1793 nach seinem Tode im Verlag von Johann Julius Hummel (Berlin-Amsterdam) veröffentlicht.

Das den musikalischen Würfelspielen zugrunde liegende Prinzip besteht darin, ein gleichförmig und periodisch ablaufendes Musikstück zu erzeugen, wobei die Auswahl der Takte zufällig erfolgt, etwa durch Würfeln. Bei den dieser zufälligen Auswahl zugrunde liegenden Kompositionen handelt es sich i.A. um Walzer, Polonaisen oder Menuette.

Mittels des Experiments „Musikalisches Würfelspiel“ im ERLEBNISLAND MATHEMATIK, kann die Idee Wolfgang Amadeus Mozarts, aus 176 Takten, die in zwei Tabellen (s.u.) angeordnet sind, durch 16-maliges Würfeln 16 Takte auszuwählen, und damit ein „neues“ Musikstück (Walzer) zu komponieren, realisiert werden. Auch akustisch!

Man benötigt zwei Würfel und die folgenden zwei Tabellen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	137	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Die römischen Ziffern über den 8 Spalten der beiden Tabellen zeigen die 8 Takte der beiden Walzerteile an. Die arabischen Ziffern geben die Nummern der Takte an, während die Zahlen 2-12 in den „Kopfspalten“ der Tabellen die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel. Für die ersten 8 „zu erwürfeln“ Takte verwendet man die erste Tabelle, für die weiteren 8 Takte die zweite Tabelle.

Falls der erste Wurf der beiden Würfel beispielsweise als Summe der Augenzahlen die Zahl 3 ergibt (d.h. einer der beiden Würfel zeigt die Augenzahl „1“, der andere Würfel die Zahl „2“), dann findet man in der ersten Spalte (und 3.Zeile) die Nummer des Taktteiles: 32. Ergibt eine erste Wiederholung des Würfelvorganges z.B. als Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen die Zahl 10, so setzt man mit dem Taktteil 142 fort. Diese Prozedur ist fortzusetzen, wobei nach dem 8. Würfelexperiment der Wechsel von der ersten zur zweiten Tabelle (automatisch) erfolgt.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Natürlich stellt man sich bei diesem musikalischen Experiment die Frage, wie groß die Anzahl der verschiedenen – aus 16 Takten bestehenden Stücke ist. Die Antwort „liefert“ die mathematische Kombinatorik:

Es sind

$$11^{16} = 45.949.729.863.572.161,$$

denn jedes Musikstück (im ERLEBNISLAND MATHEMATIK ein Walzer) besteht aus 16 Takten, der Anzahl zur möglichen Auswahl „11“ ist. Das ist eine unser Vorstellungsvermögen überschreitende große Anzahl von Möglichkeiten.

In „mathematik zum anfassen“ des Mathematikers Gießen findet sich folgende Interpretation dieser Zahl 11^{16} :

„Wenn Mozart von Geburt an in jeder Sekunde eines der möglichen Stücke gespielt hätte, und wenn er sein ganzes Leben nichts anderes gemacht hätte, als diese Stücke zu spielen und wenn er bis heute leben würde – dann hätte er eben noch nicht annähernd ein Promille (0.1% !) aller Möglichkeiten geschafft.“

Fazit: Jeder Besucher, der mit den zwei Würfeln das Experiment ausführt, „komponiert“ mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit einen neuen Mozartschen Walzer!

Literatur

- [1] A.Beutelspacher u.a., *mathematik zum anfassen*, Mathematikum Giessen 2005
- [2] Mozart,W.A., *Mathematisches Würfelspiel*, Hrsg. K.-H.Taubert, Schott Musik International, Mainz 1956
- [3] J. Ph. Kirnberger, *Der allezeit fertige Polonoisen- und Menuettencomponist*, publiziert bei Christian Friedrich Winter, Berlin 1757
Ch. Reuter, *Musikalische Würfelspiele*, 1 CD-ROM ... von Mozart, Haydn und anderen großen Komponisten. Schott Music Mainz 2001