Satz von Klarner

Wie passen möglichst viele Kisten und Koffer in mein viel zu kleines Auto? Wie werden Containerschiffe möglichst platzsparend beladen? Wie kann ich aus einer Teigplatte möglichst viele Kekse ausstechen? Wie füllt der Layouter eine Zeitungsseite lückenlos mit möglichst vielen Anzeigen?
Derartige Fragen, die im Alltag und in der Wirtschaft eine große Rolle spielen, bezeichnen Mathematiker als Packungsprobleme. Sie waren eine Spezialität des amerikanischen Mathematikers David A. Klarner (†1999).

Ein Puzzle im Erlebnisland Mathematik bezieht sich auf eine seiner zentralen Aussagen. Das „Klarner-Theorem“ besagt: Ein Rechteck $a \cdot b$, das aus Quadraten mit der Seitenlänge 1 besteht, lässt sich lückenlos mit $1 \cdot n$–langen Streifen ausfüllen, wenn mindestens eine der Seitenlängen a oder b durch n teilbar ist. Das Rechteck im Erlebnisland ist in $10 \cdot 10$, also 100 Quadrate unterteilt. Die Streifen, mit denen diese Fläche ausgefüllt werden soll, bestehen aus vier Quadraten gleicher Größe, die in einer Reihe hintereinander angeordnet sind. 25 dieser Streifen ergeben ebenfalls 100 Quadrate.

Die Aufgabe, das Rechteck mit den Streifen vollständig abzudecken, ist jedoch nicht lösbar. Wenn 24 Streifen auf die Fläche gelegt sind, bleibt in keinem Fall eine Reihe aus 4 Quadraten für den 25. Streifen frei, sondern immer ein quadratisches Feld aus $2 \cdot 2$ kleinen Quadraten. Der Satz von Klarner ist bestätigt, denn die Seitenlängen 10 sind durch die Streifenlänge 4 nicht teilbar.

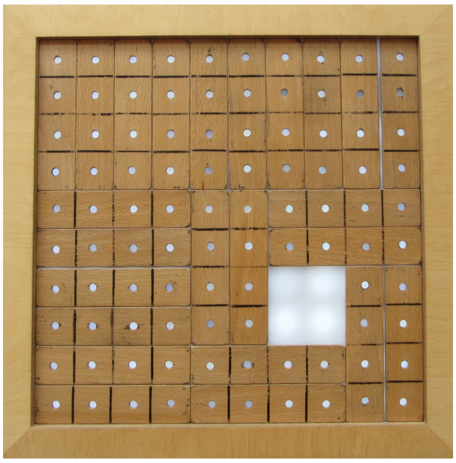

Abb.1

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Die Teilbarkeit der großen Fläche von $10 \cdot 10$ Quadraten lässt sich gut veranschaulichen, wenn die Diagonalen mit vier unterschiedlichen Farben gekennzeichnet werden. Im Erlebnisland Mathematik sind die 10 Felder der Hauptdiagonalen von links unten nach rechts oben rot, die Felder der nach rechts unten sich anschließenden Nebendiagonalen blau, orange, grün und wieder rot bis zum blauen Quadrat in der Ecke. In umgekehrter Reihenfolge werden die Nebendiagonalen nach links oben eingefärbt, also grün, orange, blau und wieder rot usw. bis zum grünen Quadrat in der Ecke (vgl. Abb.2).
Verteilt man nun die Viererstreifen in beliebiger Anordnung, so bedeckt jeder Streifen immer je ein Quadrat von jeder Farbe. Zählt man alle Quadrate jeder Farbe zusammen, so ergeben sich

- $10 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 26$ rote,
- $9 + 5 + 1 + 7 + 3 = 25$ blaue,
- $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 24$ orange und
- $7 + 3 + 9 + 5 + 1 = 25$ grüne Felder.

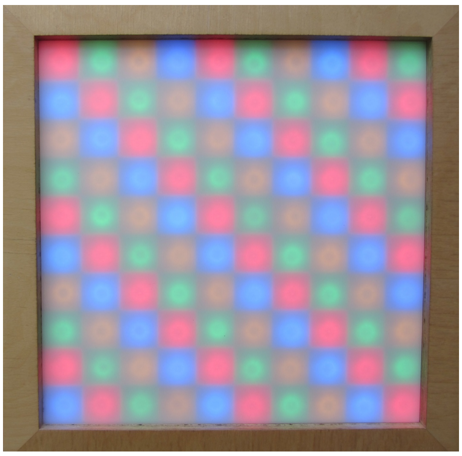

Abb.2

Fazit: Wenn jeder Viererstreifen alle vier Farben abdeckt, haben nur so viele Streifen auf der großen Fläche Platz, wie Quadrate von der Farbe vorhanden sind, die am seltensten vorkommt. Im Beispiel sind das die 24 orangen Quadrate. Ganz gleich, wie die Streifen gelegt werden, bleiben immer ein grünes, ein blaues und zwei rote Quadrate übrig. Eine Überdeckung dieser letzten vier Felder durch den letzten verbleibenden Streifen ist ausgeschlossen!

Literatur

[1] Klarner, David A.: *Packing Boxes with congruent figures,* in: American Mathematical Monthly 1 (1964), S. 100–105

[2] Klarner, David A. (Hrsg.): *Mathematical Recreations: A Collection in Honor of Martin Gardner,* Dover 1998 (Reprint der unter dem Titel *The Mathematical Gardner,* Boston 1982, erschienenen Originalausgabe)

[3] Sachs, K.: *Die Sätze von D. Klarner und N. G. de Bruijn als Exponate,* Bachelor–Arbeit am Institut für Algebra der TU Dresden, 2010