Galilei-Wanne

Wie die folgende Abbildung (Abb.1) zeigt, besteht die sogenannte Galilei-Wanne aus einer geradlinigen Rinne, die um einen Winkel geneigt ist und einen näherungsweise halbkreisförmigen Querschnitt besitzt.

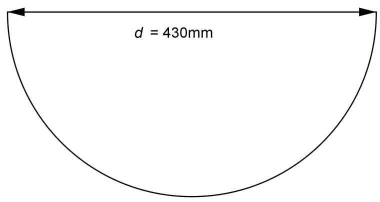

Abb.1

Im ERLEBNISLAND MATHEMATIK ist die Rinne, also die Galilei-Wanne, eine blau gefärbte Lauffläche der Länge von 3,77 m, die unter dem Winkel $\alpha = 7°$ gegenüber der Horizontalen geneigt ist. Der über die ganze Länge konstante, näherungsweise halbkreisförmige Querschnitt der Rinne wird durch eine „gedachte“ Gerade „nach oben begrenzt“. Die von ihr erzeugte Strecke hat die Länge $d = 430$ mm (vgl. Abb. 2).

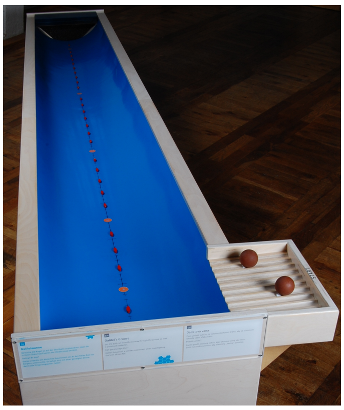

Abb.2

In der „Talsohle“ der Galilei-Wanne befinden sich kleine Hindernisse, so dass eine im rechten Winkel (zur Rinne) und am oberen Ende des rechten (in Laufrichtung) Randes der Galilei-Wanne startende Kugel diese bei ihrem Lauf „nach unten“ nicht berührt, falls ein geeigneter Start der Kugel durchgeführt wird. Dafür gibt es 10 Startmöglichkeiten als „kleine“ senkrecht zur Galilei-Wanne angebrachte geradlinige Vertiefungen (vgl. Abb. 2). Der Experimentator hat nun die Aufgabe, eben diejenige Startmöglichkeit herauszufinden, die der Kugel einen „ungestörten“ Lauf nach unten, also ohne Berührung der Hindernisse erlaubt. Die dabei von der Kugel durchlaufene Bahn stellt dann näherungsweise eine „verzerrte“ cosinusförmige Bewegung dar.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Bei der Bewegung der Kugel handelt es sich näherungsweise um die Bewegung einer Punktmasse auf eine zweidimensionalen Fläche, dargestellt durch ein kartesisches (x, y)-Koordinatensystem. Die (positive) x-Richtung beschreibt die Richtung der von oben nach unten verlaufenden Talsohle und die (positive) y-Richtung die von der Talsohle dazu senkrecht verlaufende Richtung von der Talsohle zum rechten (in Laufrichtung) oberen Rand der Galilei-Wanne (vgl. Abb. 3):

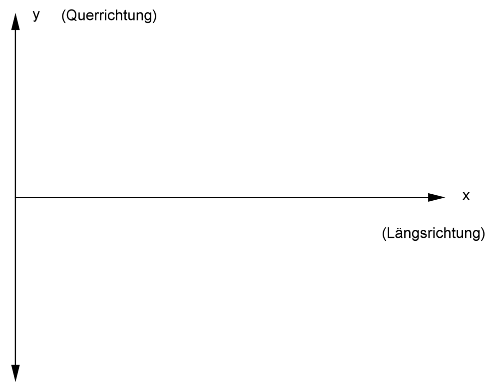

Abb.3

Die Bewegung der Kugel in x-Richtung wird dann - bei Vernachlässigung der Reibung - durch das folgende Weg-Zeit-Gesetz

$$x(t) = \frac{g}{2} t^2 \sin(\alpha) \quad (t > 0) \tag{1}$$

beschrieben (t - Zeit in Sekunden (s)). Dabei sind $g = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung und α der Neigungswinkel der Galilei-Wanne.
In y-Richtung liegt näherungsweise eine harmonische Schwingung („Cosinus-Schwingung“) der Form

$$y(t) = A \cos(\omega t) \tag{2}$$

vor. Dabei ist ω die Kreisfrequenz dieser Schwingung und A die Amplitude mit

$$A = \frac{\pi d}{4}.$$

Stellt man die Gleichung (1) nach der Zeit um, so ergibt sich:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2x(t)}{g\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x(t)}{g\sin(\alpha)}} \tag{3}$$

Folglich erhält man für alle Zeitpunkte t das Weg-Zeit-Gesetz $y(t)$ in y-Richtung als Funktion des Weg-Zeit-Gesetzes $x(t)$ in x-Richtung:

$$(3),(2) \quad \Rightarrow \quad y(t) = A\cos\left(\omega\sqrt{\frac{2x(t)}{g\sin(\alpha)}}\right) \quad (t \geq 0) \quad \Rightarrow$$

$$y = A\cos\left(\omega\sqrt{\frac{2x}{g\sin(\alpha)}}\right) \quad (x \geq 0)$$

$$y = A\cos(\omega'\sqrt{x}) \quad \text{mit} \quad \omega' = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{g\sin(\alpha)}}$$

Also ist y mit den konkreten Werten für den Neigungswinkel $\alpha = 7°$ der Amplitude $A = \frac{\pi d}{4} = 337,7$ mm und der Kreisfrequenz $\omega = 6,9\ \mathrm{s}^{-1}$:

$$y = 337,7\cos(0,2822\sqrt{x})$$

Dann wird die Bahnkurve der „nach unten“ rollenden Kugel näherungsweise durch die folgende Kurve beschrieben (vgl. Abb. 4):

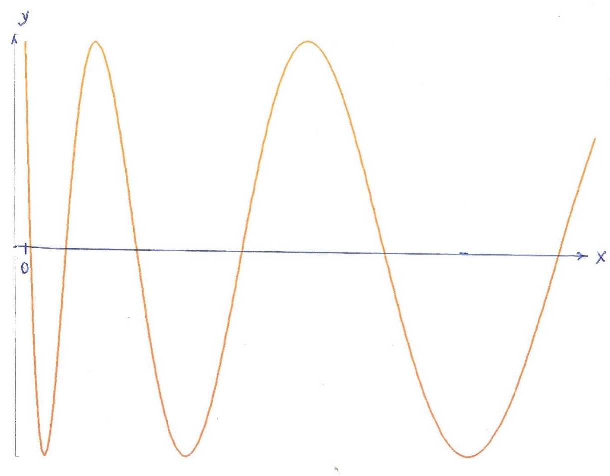

Abb.4