

Kürzester Abstand

Im Januar 2011 meldete die Lufthansa, dass eines ihrer Flugzeuge des Typs Boeing 747 über Grönland den Flug nach San Francisco wegen Ölverlustes in einem der vier Triebwerke abgebrochen habe und nach Frankfurt/M. zurück gekehrt sei.

Bei einem Blick auf eine Weltkarte fragt man sich erstaunt, was die Boeing 747 bei einem Direktflug Frankfurt/M. – San Francisco über Grönland „zu suchen“ habe. Schaut man dagegen auf einen Globus, so wird sofort klar, dass die kürzeste Strecke von Frankfurt/M. nach San Francisco eben über Grönland verläuft (vgl. Abb. 1) und nicht – wie es eine Weltkarte (vgl. Abb. 2) vermuten lässt – in einer Entfernung von etwa 100 Meilen nördlich an New York „vorbei“.

Ein Experiment im ERLEBNISLAND MATHEMATIK macht dies durch Vergleich von Strecken auf dem Globus und einer Weltkarte deutlich, wie die folgenden Abbildungen zeigen:



Abb.1



Abb.2

Natürlich ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in einer Ebene eine Gerade. Es ist der sog. euklidische Abstand. (Die zweite Abbildung zeigt dies deutlich.)

ABER:

Die Rolle der Geraden kommt in der sphärischen Geometrie (also der Geometrie auf der Kugel) den sog. Großkreisen zu. Großkreise sind Kreise auf der Kugel, deren (sog. „euklidischer“) Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt ist. Beispiele für Großkreise auf dem Globus sind der Äquator und die Meridiane. Einen Großkreis erhält man durch Schnitt der Kugeloberfläche mit einer den Kugelmittelpunkt enthaltenden Ebene.

Das heißt, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Kugel (also insbesondere zwischen zwei Städten auf der Erdkugel) ist Teil eines Großkreises. Im konkreten Fall der kürzesten Verbindung von Frankfurt/M. nach San Francisco führt der entsprechende Großkreis – also die kürzeste Verbindung zwischen diesen beiden Städten - eben mitten über Grönland.

Eine (ebene) Weltkarte gibt diesen Sachverhalt nicht wieder, da die Abbildung einer Kugel auf eine Ebene notwendigerweise erfordert, dass mindestens auf eine der folgenden Eigenschaften bei dieser Abbildung verzichtet werden muss, nämlich auf die Winkeltreue oder die Flächentreue oder die Abstandstreue oder die Richtungstreue.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Im ERLEBNISLAND MATHEMATIK wird neben einem Globus eine Weltkarte gezeigt, die durch eine – prinzipiell - zylindrische Projektion entstanden ist.

Dabei versteht man unter einer (einfachen) zylindrischen Projektion eine Abbildung, bei der die Oberfläche einer Kugel auf einen Zylinder projiziert wird. Speziell berührt bei einer sog. tangentialen Zylinderprojektion die Kugel den Zylinder an einem ihrer Großkreise (z.B. am Äquator). Man kann sich diese Projektion folgendermaßen vorstellen: Die von einer Lichtquelle im Zentrum der (als durchscheinend angenommenen) Kugel ausgehenden Lichtstrahlen bilden dann die Oberfläche der Kugel auf die Innenseite des Zylinders ab (vgl. Abb.3). Es handelt sich also um eine Zentralprojektion.

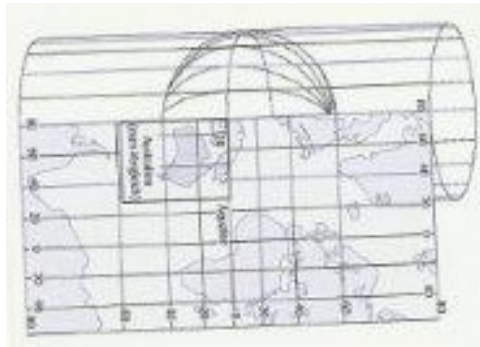


Abb.3

Diese Projektion - sie ist winkeltreu! - wird häufig (aber wohl zu Unrecht!) als Mercatorprojektion bezeichnet. Obwohl die eigentliche Mercatorprojektion eine zylindrische Projektion ist, besteht doch ein wesentlicher Unterschied zu dem in Abb.3 gezeigten Projektionsverfahren. Bei der eigentlichen Mercatorprojektion wird das durch (Zentral-) Projektion entstandene Bild in Richtung der Zylinderachse so verzerrt, dass der Maßstab in der vertikalen Nord-Süd-Richtung in jedem Punkt der gleiche ist wie in der horizontalen Ost-West-Richtung. Folglich verändert sich dabei der Maßstab vom Äquator her in Richtung Nordpol einerseits und in Richtung Südpol andererseits stetig, ist aber eben an jedem Ort auf der Erdkugel in vertikaler und horizontaler Richtung der gleiche.

Die Mercatorprojektion ist somit keine optisch (etwa durch den Verlauf von Lichtstrahlen) beschreibbare Projektion, sondern nur analytisch, d.h. durch mathematische Abbildungseigenschaften, zu erzeugen. Man verwendet, um sich diesen Vorgang dieser Projektion vorstellen zu können, folgende Plausibilitätsbetrachtung: Man stellt sich die Erde als kugelförmigen Luftballon vor und bringt diesen in einen Glaszylinder, so dass der Äquator (auf dem Luftballon) genau die Wand des einhüllenden Zylinders berührt. Pumpt man den Ballon auf, so werden die Bereiche südlich und nördlich des Äquators in der jeweiligen Polrichtung zunehmend an die Zylinderwand gepresst. Der Maßstab verändert sich so stetig und in beiden Richtungen. Die Konstruktion einer Mercator-Karte zeigt die Abb.4.

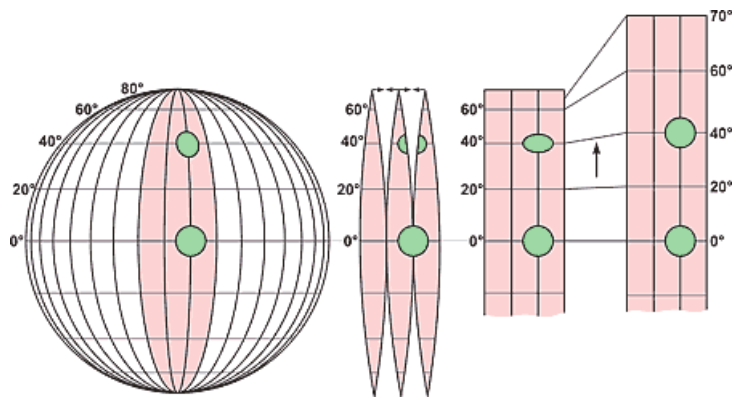


Abb.4

Zur Verdeutlichung werden auf einer Kugel zwei Kreise eingezeichnet. Der erste Kreis bei 0° , also am Äquator, der zweite Kreis bei 60° . Wickelt man nun die Kugeloberfläche ab, so entstehen krummlinig begrenzte Zweiecke, die sich am Äquator berühren und in beiden Polrichtungen sich kontinuierlich voneinander entfernen. Streckt man nun die Flächen so, dass keine Lücken mehr vorhanden sind, sieht man, dass der obere Kreis verzerrt wurde. Durch die Dehnung in x -Richtung wurde daraus eine Ellipse. Im dritten Teil der Mercator-Konstruktion wird die Karte nun so gedehnt, dass alle Kreise wieder Kreise werden. Damit nehmen die Abstände zwischen den Breitengraden sowohl in Richtung des Nordpols als auch des Südpols hin zu. Diese Verzerrung führt auch dazu, dass Mercator-Karten i.a. nur bis 60° oder 70° Breitengrad in nördlicher oder südlicher Richtung reichen. Auf die Darstellung der Pole muss daher verzichtet werden.

Der Mercator-Entwurf ist winkeltreu. Deshalb werden sog. Loxodromen (d.h. Kurven, die die Meridiane stets unter dem gleichen Winkel schneiden) zu Kurven, die stückweise aus Geraden bestehen. Aber: Der Mercator-Entwurf ist nicht flächentreu, wie Abb.2 – wenn auch nur z.T. zeigt: Obwohl die Insel Grönland nur ca. $1/15$ der Fläche des afrikanischen Kontinents besitzt, erscheint sie auf einer Weltkarte etwa so groß wie Afrika:

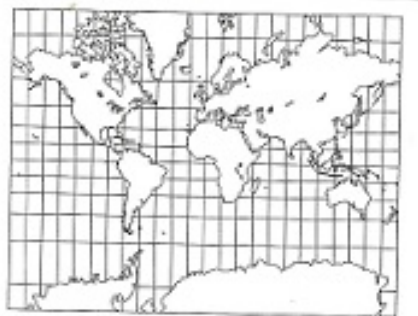


Abb.5

Literatur

- [1] Kuntz, E.: *Kartennetzentwurfslehre: Grundlage und Anwendungen*, 2.Aufl., Karlsruhe 1990
- [2] Schröder, E.: *Kartenentwürfe der Erde*, Frankfurt/M. 1988