π

Am Experiment zur Kreiszahl $\boldsymbol{\pi}$ im Erlebnisland Mathematik lässt sich feststellen, dass und an welcher Stelle der Ziffernfolge von $\boldsymbol{\pi}$ sich das Geburtsdatum jedes beliebigen Besuchers befindet.

Ist z. B. „14. März 1941“ das Geburtsdatum des Besuchers, so hat er die Zahlen 1 4 0 3 4 1 einzugeben. Das Resultat ist „in Sekundenschnelle“ auf dem Bildschirm ablesbar: Diese Ziffernfolge erscheint in der Dezimalentwicklung von $\boldsymbol{\pi}$ erstmalig an der 976.229–ten Stelle.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Die so genannte Kreiszahl $\boldsymbol{\pi}$ (auch Archimedes–Konstante oder Ludolphsche Zahl genannt) ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser in einem Kreis, d. h. ein Kreis mit einem Durchmesser von 1 hat einen Umfang von $\boldsymbol{\pi}$. Die Zahl $\boldsymbol{\pi}$ ist eine mathematische Konstante. Ihr Wert besitzt eine unendliche, nicht–periodische Dezimalbruchentwicklung. Anders gesagt: die Folge der Ziffern des Dezimalbruchs hört niemals auf und die Ziffern erscheinen zufällig angeordnet. Mit den ersten fünf „Nachkommastellen“ beträgt der Wert für $\boldsymbol{\pi}$

$$3,14159.$$

Die Kreiszahl wird mit dem kleinen griechischen Buchstaben $\boldsymbol{\pi}$ (Pi) bezeichnet, dem Anfangsbuchstaben der griechischen Wörter $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ – periphereia (Randbereich) und $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho\omega\varsigma$ – perimetros (Umfang). Als erster verwendete das $\boldsymbol{\pi}$ der Walisische Mathematiker William Jones in der 1706 publizierten „Synopsis palmariorum matheseos“ (Überblick über die Hauptwerke der mathematischen Wissenschaft). Nachdem sein Schweizer Kollege Leonhard Euler 1737 die Schreibweise übernommen hatte, wurde die Bezeichnung der Kreiszahl mit dem griechischen Kleinbuchstaben $\boldsymbol{\pi}$ allgemein üblich.

Die Zahl $\boldsymbol{\pi}$ ist eine irrationale Zahl, also eine reelle, aber keine rationale Zahl. Das bedeutet, dass sie nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen, also als Bruch dargestellt werden kann. Die Zahl $\boldsymbol{\pi}$ ist sogar transzendent. Das heißt, dass es kein Polynom endlichen Grades n mit rationalen Koeffizienten:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gibt, das in π eine Nullstelle hat, d.h. $P_n(x) = 0$. Als Konsequenz ergibt sich, dass es unmöglich ist, die Zahl π nur mit ganzen Zahlen oder Brüchen und Wurzeln auszudrücken. Daraus folgt, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal allein nicht möglich ist, denn nur ganze Zahlen, Brüche oder Wurzeln sind auf eben diese Weise konstruierbar. Die Aufgabe, aus einem gegebenen Kreis in endlich vielen Schritten ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren – also die Quadratur des Kreises – ist deshalb nicht lösbar.

Da π eine irrationale Zahl ist, lässt sie sich in keinem Stellenwertsystem vollständig angeben. Die Darstellung von π – nicht nur im Dezimalsystem – ist also unendlich lang und nicht periodisch. In der Ziffernfolge hinter dem Komma ist keine Regelmäßigkeit erkennbar, sie genügt statistischen Tests auf Zufälligkeit. Als Dezimalbruchentwicklung mit den ersten 200 Nachkommastallen sieht π folgendermaßen aus:

3, 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7 1 6 9 3 9 9
3 7 5 1 0 5 8 2 0 9 7 4 9 4 4 5 9 2 3 0 7 8 1 6 4 0 6 2 8 6 2 0 8 9 9 8 6 2 8 0 3 4 8 2 5 3 4
2 1 1 7 0 6 7 9 8 2 1 4 8 0 8 6 5 1 3 2 8 2 3 0 6 6 4 7 0 9 3 8 4 4 6 0 9 5 5 0 5 8 2 2 3 1 7
2 5 3 5 9 4 0 8 1 2 8 4 8 1 1 1 7 4 5 0 2 8 4 1 0 2 7 0 1 9 3 8 5 2 1 1 0 5 5 5 9 6 4 4 6 2 2
9 4 8 9 5 4 9 3 0 3 8 1 9 6 4 4 2 8 8 1.

Seit Jahrtausenden hat π Mathematiker auf der ganzen Welt fasziniert und bis heute beschäftigen sich Wissenschaftler damit, die Eigentümlichkeiten der Zahl π zu erforschen und ihren Wert immer genauer zu bestimmen. Der griechische Mathematiker Archimedes erkannte bereits um 250 v. Chr., dass der Quotient von Umfang und Durchmesser des Kreises eine konstante Zahl ist, die seinen Berechnungen zufolge zwischen 3,1408450 und 3,1428450 liegen müsse.

Im Alten Testament (1. Buch der Könige 7,23) finden sich die Maße eines runden Wasserbeckens, das der israelitische König Salomo für den Tempel in Jerusalem bauen ließ: „Dann machte er das Meer. Es wurde aus Bronze gegossen und maß 10 Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und 5 Ellen hoch. Eine Schnur von 30 Ellen konnte es rings umspannen.“ Für das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser ergibt sich somit der Wert 3. Genauer waren die Angaben ägyptischer Gelehrter. Das älteste bekannte Rechenbuch der Welt, das Rechenbuch des Ahmes aus dem 17. Jahrhundert v. Chr., nennt den Wert

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1604.$$

In Babylon (im heutigen Irak) benutzte man wenig später als Näherung für π den Wert

$$3 + \frac{1}{8} = 3,125.$$

Die indischen „Schnurregeln“ zur Konstruktion von Altären aus der Mitte des ersten Jahrtausends v. Chr. geben für die Kreisberechnung den Wert

$$\left(\frac{26}{15}\right)^2 \approx 3,0044$$

für π an. Im 6. Jahrhundert n. Chr. bestimmte der indische Mathematiker Aryabhata den Wert bereits sehr genau auf 3,1416.

Lange Zeit konnte die Frage, ob π eine rationale oder eine irrationale Zahl sei, nicht beantwortet werden. Erst in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts konnte der Mathematiker Johann Heinrich Lambert die Irrationalität von π beweisen. Zuvor hatte der englische Mathematiker John Wallis im Jahr 1655 das nach ihm benannte Wallissche Produkt entwickelt:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots=\frac{\pi}{2}.$$

Gottfried Wilhelm Leibniz fand 1682 die folgende Reihendarstellung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{\pi}{4}$$

Eine erstaunliche Entdeckung gelang dem indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan im Jahr 1914:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(1103+26390n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}.$$

Dabei ergeben sich für

$$\frac{1}{\pi}=0,31830988618379067153776752674502872406891929148091\ldots$$

bei den Summationen mit den oberen Grenzen $N=0,\ldots,6$ („Partialsummen“) folgende (hinsichtlich ihrer Genauigkeit erstaunlichen 50–stelligen) Näherungswerte:

0.31830987844047012321768445317891990218597042720961

0.31830988618379060673919643382082822511793407438050

0.31830988618379067153776695099517846798758674972804

0.31830988618379067153776752674502341595719811361809

0.31830988618379067153776752674502872406886919638714

0.31830988618379067153776752674502872406891929148043

0.31830988618379067153776752674502872406891929148091.

Im Jahre 1996 entdeckten David Harold **B**ailey, Peter **B**orwein und Simon **P**louffe eine neuartige Reihendarstellung (bald als **BBP**–Reihe bezeichnet) für π:

$$\pi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right).$$

Später wurden für π weitere BBP–Reihen gefunden:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{8}{8k+2}+\frac{4}{8k+3}+\frac{4}{8k+4}-\frac{1}{8k+7}\right)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{8}{8k+1}+\frac{8}{8k+2}+\frac{4}{8k+3}-\frac{2}{8k+5}-\frac{2}{8k+6}-\frac{1}{8k+7}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)
\end{aligned}$$

Für

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

ergeben sich dabei z.B. für die oberen Summationsindizes $N = 76, 77, 78$ die (50–stelligen) Näherungswerte („Partialsummen“)

3.14159265358979323846264338327950288419716939937 57

3.14159265358979323846264338327950288419716939937 50

3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51.

Die Näherungswerte von π und die Verfahren zu ihrer Bestimmung waren lange Zeit insbesondere für praktische Anwendungen, z. B. im Bauwesen, sehr wertvoll. Die in den letzten Jahrzehnten ermittelten Näherungswerte hingegen haben bereits so viele Stellen, dass ein praktischer Nutzen kaum noch gegeben ist.

Das zeigt sich etwa anhand der Fragestellung, wie viele Stellen von π erforderlich sind, um den größten im Universum vorstellbaren realen Kreis mit der besten Genauigkeit zu berechnen. Nach neuesten kosmologischen Betrachtungen ergibt sich, dass das Licht des Urknalls in Form der Hintergrundstrahlung uns aus einer Entfernung erreicht, die sich als das Produkt des angenommenen Weltalters (etwa $1,3 \cdot 10^{10}$ Jahre) mit der Lichtgeschwindigkeit (etwa 300.000 km/s oder $9,46 \cdot 10^{15}$ m/Jahr) ergibt, also rund $1,3 \cdot 10^{26}$ m. Der Kreis mit diesem Radius hätte einen Umfang von $\pi \cdot 1,3 \cdot 10^{26}$, also etwa $8,17 \cdot 10^{26}$ m. Die kleinste physikalisch sinnvolle Längeneinheit ist die so genannte Planck–Länge von etwa 10^{-35} m. Der gedachte Kreisumfang bestände also aus $8,17 \cdot 10^{61}$ Planck–Längen. Um seinen Umfang aus dem gegebenen und auf eine Planck–Länge genau bekannten Radius mit der Genauigkeit von wiederum einer Planck–Länge zu berechnen, würden also schon 62 Dezimalstellen von π ausreichen.

Eine zurzeit besonders aktuelle mathematische (**aber noch nicht beantwortete!**) Frage bezüglich π ist, ob sie eine **normale Zahl** ist, d. h., ob sie zum Beispiel in einer binären Zahlendarstellung jede mögliche endliche binäre Zifferngruppe gleichermaßen enthält – so wie dies die Statistik erwarten ließe, wenn man eine Zahl vollkommen nach dem Zufall erzeugen würde.

Wenn diese Annahme „π ist eine normale Zahl“ zutrifft, ist der Inhalt jedes bisher geschriebenen und auch in Zukunft entstehenden Buches in binärer Kodierung in der binären Darstellung von π enthalten!

Wesentlich einfacher ist die Aufgabe bei dem Exponat im Erlebnisland Mathematik. Die Vermutung, dass in der Dezimaldarstellung von π jede sechsstellige Zahlenfolge auftritt, hat sich bisher stets bestätigt.

Schließlich...

An der Zahl π entzündet sich bis heute die Phantasie von Mathematikern, Informatikern (speziell auf der Suche nach immer neuen Dezimalstellen) und mathematisch interessierten „Nicht–Mathematikern“. Erwähnenswert sind dabei u. a. folgende „Nachrichten“:

- An der 1.142.905.318.634. Nachkommastelle von π findet man laut dem japanischen Mathematiker und Lehrstuhlinhaber für Informatik, Yasumasa Kanada (*1948) erstmalig erneut die Ziffernfolge 314159265358. Bis 2009 hielt er den „Weltrekord“ bei der Bestimmung der Anzahl der Nachkommastellen von π.
- Freunde der Zahl π gedenken zum einen am 14. März der Kreiszahl mit dem π–Tag wegen der amerikanischen Datumsnotation 3–14. Zum anderen wird ein π–Näherungstag am 22. Juli gefeiert, mit dem die Näherung 22/7 für π von Archimedes geehrt werden soll.
- In den „Sternstunden der modernen Mathematik“ von Keith Devlin (vgl. Literaturverzeichnis) findet sich ein weiteres Beispiel, in dem π überraschenderweise eine Rolle spielt:
  Wenn man ein Streichholz auf ein Brett wirft, das durch parallele, jeweils eine Streichholzlänge voneinander entfernte Linien unterteilt ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Streichholz so fällt, dass es eine Linie schneidet, genau $2/\pi$. Dabei handelt es sich um eine Variante des berühmten Paradoxons beim Buffon’schen Nadel–Experiment.
- Den inoffziellen Weltrekord im Auswendiglernen von π hält der Japaner Akira Haraguchi, der am 4. Oktober 2006 in 16 Stunden 100.000 Nachkommastellen von π „aus dem Kopf“ aufgesagt haben soll.

Literatur

[1] Behrends, E.: *π und Co. Kaleidoskop der Mathematik,* Berlin / Heidelberg 2008

[2] Beutelspacher, A.: *mathematik zum anfassen,* Gießen 2005

[3] Delahaye, J.–P.: π – *Die Story,* Basel 1999

[4] Devlin, K.–J.: *Sternstunden der modernen Mathematik. Berühmte Probleme und neue Lösungen.* 2. Auflage, München 1992

[5] Jones, W.: *Synopsis palmariorum matheseos: or, A new introduction to mathematics containing the principles of arithmetic & geometry demonstrated, in a short and easie method; with their application to the most useful parts thereof ... Design'd for the benefit, and adapted to the capacities of beginners,* London 1706

[6] Schmidt, K.–H.: π*. Geschichte und Algorithmen einer Zahl,* Norderstedt 2001

[7] Tietze, H.: *Mathematische Probleme. Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik.* München 1990

[8] Zschiegner, M.A.: *Die Zahl* π *– faszinierend normal! in: mathematik lehren 98 (2000), S. 43–48*