Turm von Ionah

Der „Turm von Ionah“ ist die eindeutige Umkehrung (in vertikaler Richtung) der berühmten Aufgabe, den „Turm von Hanoi“ entstehen zu lassen. Aus dieser Umkehrung entstand auch der Name „Ionah“, indem die Reihenfolge der Buchstaben H, A, N, O, I durch „Lesen von rechts nach links“ in I, O, N, A, H übergeht.

Abb.1

Die Geschichte des „Turmes von Ionah“ ist also auch die Geschichte des „Turmes von Hanoi“ (mitunter auch als „Turm des Brahma“ oder das „Weltende – Puzzle“ bezeichnet).

Der Turm von Hanoi – und damit auch der „Turm von Ionah“ wurde im Jahre 1883 von dem französischen Mathematiker Francois Eduord Lucas (1842–1891) erfunden. Er war zunächst einfach ein Spiel mit dem Namen „M.Claus“.

In einer einfachen Form besteht der „Turm von Ionah“ - wie im ERLEBNISLAND MATHEMATIK - aus fünf Kreisscheiben, die übereinander konzentrisch in eienr Vertiefung liegen. Zum „Turm von Ionah“ gehören zwei gleichgeartete Vertiefungen (vgl. Abbildung). Die Aufgabe des Spieles besteht darin, die Scheiben des Turmes von einer der drei Vertiefungen in eine zweite zu überführen, wobei folgende zwei Regeln zu beachten sind:

(I) Man darf stets nur eine Scheibe umlegen.
(II) Man darf eine kleinere nicht auf eine größere Scheibe legen.

Die dritte Vertiefung dient als zusätzliches Zwischenlager.

Die Idee zu diesem Spiel „als Turm von Hanoi“ bezog F. E. Lucas aus folgender asiatischer Legende:
Im großen Tempel der indischen Stadt Benares (heute: Varanasi), unter dem Dom, der die Mitte der Welt symbolisiert, ruht eine Messingplatte, in der Diamantnadeln befestigt

sind, jede eine Elle (ca. 50 – 80 cm) hoch und stark wie der Körper einer Biene. Bei der Erschaffung der Welt hat Gott 64 Scheiben aus purem Gold auf eine der Nadeln gesteckt, wobei die größte Scheibe auf der Messingplatte ruht, und die übrigen, immer kleiner werdend, eine auf der anderen. Das ist der Turm von Brahma. Tag und Nacht sind die Priester unablässig damit beschäftigt, den festgeschriebenen und unveränderlichen Gesetzen von Brahma folgend, die Scheiben von einer Diamantnadel auf eine andere zu setzen, wobei der oberste Priester nur jeweils eine Scheibe auf einmal umsetzen darf, ***und zwar so, dass sich nie eine kleinere Scheibe unter einer größeren befindet.*** *Sobald dereinst alle vierundsechzig Scheiben von der goldenen Nadel, auf die Gott sie bei seiner Erschaffung der Welt gesetzt hat, auf eine der anderen Nadeln gebracht sein werden, werden – so die Legende – der Turm samt dem Tempel und allen Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt wird mit einem Donnerschlag untergehen.*

Und ... die Zahl der Scheibenbewegungen durch den obersten Priester wäre – folgt man der Legende – „im günstigsten Fall“:

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Würde eine Scheibenbewegung nur eine Sekunde erfordern, dauerte das Umsetzen der 64 goldenen Scheiben den unvorstellbaren Zeitraum von 580 Milliarden Jahren. (Der sog. Urknall, also die Entstehung des Universums, fand nach heutigen Erkenntnissen vor ca. 12 Milliarden Jahren statt!)

Im Erlebnisland Mathematik ist die Anzahl der Scheiben des Turmes von Ionah nicht 64, sondern 5. Wie die folgende mathematische Überlegung zeigt, ist die minimale Anzahl der Bewegungen der fünf Scheiben

$$2^5 - 1 = 31$$

um den Turm von Ionah in seine bisherige Gestalt umzusetzen, unter Berücksichtigung der Regel, dass nie eine kleinere Scheibe auf einer größeren zu liegen kommt.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Es sei n die Anzahl der Scheiben. Weiter bezeichne A den ursprünglichen Turm mit den Scheiben $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (von „oben“ nach „unten“) und C den „Zielturm“.

Die Anzahl der Züge der optimalen Lösung (minimale Anzahl von Zügen) ist dann $2^n - 1$. Dies lässt sich mittels „Induktion“ beweisen. Für eine einzelne Scheibe ist diese Aussage sicher richtig, denn diese muss nur von A nach C verschoben werden, die optimale Zugfolge besteht also, wie behauptet, aus einem Zug. Für größere Scheibenanzahlen wird die Anzahl der Züge durch Summation der Züge für die Teilprobleme nachgewiesen. Die Zuganzahl entspricht also dem Doppelten der minimalen Zuganzahl für den um eine Scheibe kleineren Turm, da dieser zweimal bewegt werden muss, vermehrt um den einen Zug, um die kleinste Scheibe zu bewegen.

Wie behauptet folgt:

$$(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1.$$

Es lässt sich ausrechnen (was nicht ganz leicht ist), wie oft und bei welchen Zügen eine Scheibe bei einer optimalen Zugfolge bewegt wird. Allgemein gilt, dass die Scheibe S_k genau 2^{n-k} mal bewegt wird. Dabei wird sie beim Zug 2^{k-1} das erste Mal und dann nach jeweils 2^k Zügen erneut bewegt.

Die größte Scheibe S_1 wird bei jedem zweiten Zug bewegt, beginnend mit dem ersten Zug. Die zweitgrößte Scheibe S_2 wird bei jedem vierten Zug bewegt, beginnend mit dem zweiten Zug. Die kleinste Scheibe S_n wird einmal bewegt, und zwar beim mittleren, also dem 2^{n-1}–ten Zug. Die zweitkleinste Scheibe S_{n-1} wird zweimal bewegt, und zwar nach dem ersten und dritten Viertel der um 1 erhöhten Zugfolge, also bei den Zügen 2^{n-2} und $3 \cdot 2^{n-2}$. Auf diese Weise ist es möglich, an jedem Punkt der Zugfolge zu bestimmen, welche Scheibe als nächste bewegt werden muss.

Die Vorgehensweise beschreibt folgender Algorithmus, der auf dem Prinzip der Bellmanschen Dynamischen Optimierung (engl.: Dynamic Programming) beruht:

Es sei

- $\text{Sol}[n, x, y]$:= Lösung eines Spieles, das fordert, n Ringe aus einer (kreisförmig abgestuften) Form x (vgl. obige Abbildung) in eine entsprechende Form y zu bewegen und
- $\text{not}(x, y)$:= eine Form, die weder x noch y ist, sowie
- $\text{Sol}[1, x, y]$:= man bewege einen Ring (direkt) von x nach y.

Dann erhält man für die obige Aufgabe folgenden iterativen Algorithmus:

$$\begin{aligned} \text{Sol}[n, x, y] \quad = \quad & \text{Sol}[n-1, x, \text{not}(x, y)], \\ & \text{Sol}[1, x, y], \\ & \text{Sol}[n-1, \text{not}(x, y), y]. \end{aligned}$$

Im Falle $n = 5$ – wie bei dem Exponat im Erlebnisland Mathematik – hat der Algorithmus folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{Sol}[5, x, y] \quad = \quad & \text{Sol}[4, x, \text{not}(x, y)], \\ & \text{Sol}[1, x, y], \\ & \text{Sol}[4, \text{not}(x, y), y] \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sol}[4, x, \mathrm{not}(x, y)] \quad = \quad & \mathrm{Sol}[3, x, \mathrm{not}(x, \mathrm{not}(x, y))], \\
& \mathrm{Sol}[1, x, \mathrm{not}(x, y)], \\
& \mathrm{Sol}[3, \mathrm{not}(x, \mathrm{not}(x, y)), \mathrm{not}(x, y)]
\end{aligned}
$$

usw.

Literatur

[1] Gardner, M.: *Mathematical Puzzles & Diversions,* New York 1959

[2] van Delft, P., und Botermans, J.: *Denkspiele der Welt,* München 1998

[3] http://www.mathematik.ch/spiele/hanoi_mit_grafik/