

# Satz von Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist einer der fundamentalen Sätze der zweidimensionalen Geometrie. Er besagt, dass bei allen rechtwinkligen Dreiecken (vgl. Abb. 1) die Seitenlängen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen: Bildet man über den drei Seiten jeweils ein Quadrat, so ist die Summe der Flächen der beiden kleinen Quadrate (über den Katheten  $a$  und  $b$ ) genau so groß wie die Fläche des großen Quadrats (über der Hypotenuse  $c$ ). Als Gleichung ausgedrückt lautet der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

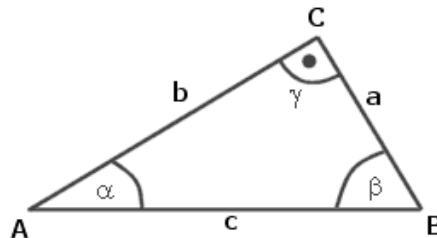


Abb.1

Pythagoras selbst wurde - sein Lebensbericht enthält wohl auch legendenhafte Züge - um 570 v. Chr. auf der griechischen Insel Samos als Sohn eines Goldschmiedes geboren. Nachdem er sich durch Studien bei gelehrten Priestern und auf Reisen mit dem damaligen Wissen, vor allem der babylonischen und der ägyptischen Wissenschaft, vertraut gemacht hatte, gründete Pythagoras eine eigene Schule, mit der er seine Schüler zu „innerer Reinheit“ führen wollte. Pythagoras verordnete seinen Schülern „mathematica“ und ließ sie sich auf Arithmetik, Geometrie und Musikwissenschaften konzentrieren.

Das Wissen um die Seitenverhältnisse an einem rechtwinkligen Dreieck war schon um 1800 v. Chr. babylonischen Gelehrten und spätestens im 6. Jahrhundert v. Chr. auch in Indien bekannt. Die Rolle, die Pythagoras für die Vermittlung des später nach ihm benannten Satzes und für seinen mathematischen Beweis gespielt hat, ist nicht unumstritten (Abb.2).

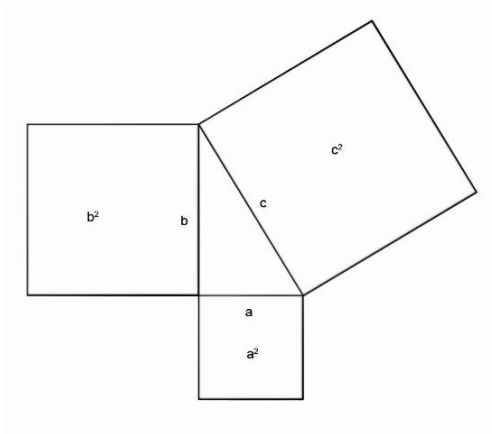


Abb.2

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Man kennt heute eine Vielzahl von Beweisen für den Satz des Pythagoras. Einer von diesen beruht auf folgender Überlegung (vgl. Abb.3a/3b):

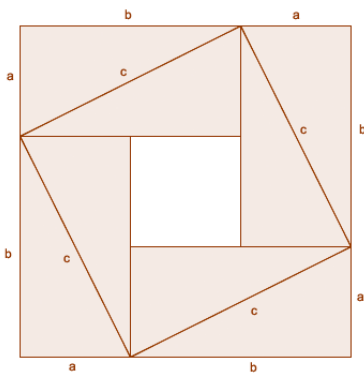


Abb.3a

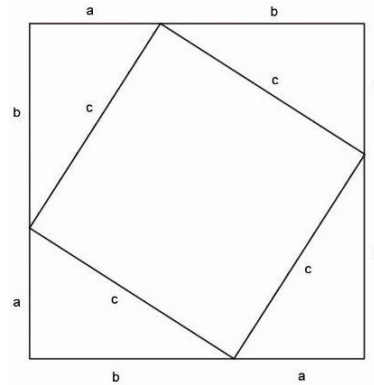


Abb.3b

Das äußere Quadrat hat die Seitenlängen  $a + b$  und somit die Fläche

$$F_{\text{ä}} = (a + b)^2.$$

Die Fläche  $F_{\text{ä}}$  ergibt sich aber auch durch die Addition der Flächen

$$F_D = \frac{ab}{2},$$

der vier (rechtwinkligen) Dreiecke mit den Seiten  $a, b, c$  sowie der Fläche

$$F_i = c^2$$

des inneren Quadrates mit der Seitenlänge  $c$ . Also ist

$$F_{\text{ä}} = 4F_D + F_i \quad (\text{vgl. Abb.3a,3b}),$$

d.h.

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

oder

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

bzw.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Das Exponat im ERLEBNISLAND MATHEMATIK zeigt die Richtigkeit des Satzes des Pythagoras auf elementare Weise:

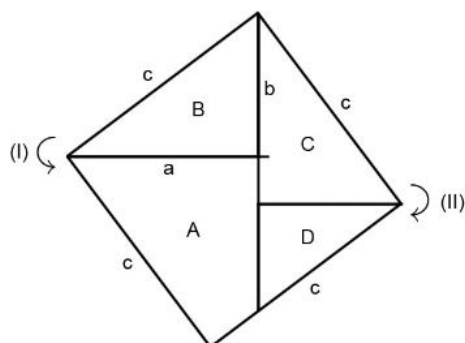


Abb.4

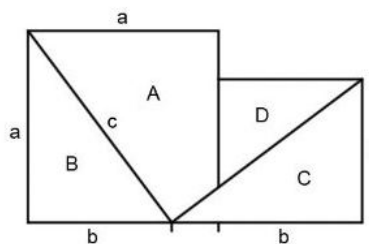


Abb.5

Durch Umklappen der Fläche  $B$  (nach links) und der Fläche  $C$  (nach rechts) um die Drehpunkte  $(I)$  bzw.  $(II)$  bis zum Anschlag (vgl. Abb.4) erhält man aus einem Quadrat mit der Seitenlänge  $c$  (also dem Flächeninhalt  $c^2$ ) zwei Quadrate mit den Flächeninhalten  $a^2$  und  $b^2$  (vgl. Abb.5).

## Literatur

- [1] Dewdney, A.K.: *Reise in das Innere der Mathematik*, Berlin 2000
- [2] Fraedrich, A.M.: *Die Satzgruppen des Pythagoras*, Mannheim 1995
- [3] Maor, E.: *The Pythagorean Theorem: A 4,000-year History*, Princeton 2007
- [4] Schupp, H.: *Elementargeometrie*, Stuttgart 1977
- [5] Singh, S.: *Fermats letzter Satz*, München 2000
- [6] v. Wedemeyer, I.: *Pythagoras, Weisheitslehrer des Abendlandes*, Ahlerstedt 1988

## Und nun...

eine - mathematisch nicht ganz ernst zu nehmende - literarische Verarbeitung. Der deutsche Dichter Adalbert von Chamisso (1781 - 1838) schildert das legendäre Opfer, das Pythagoras den Göttern dargebracht haben soll, nachdem er „seinen“ Satz entdeckt hatte.

Vom pythagoreischen Lehrsatz

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,  
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt;  
Der Lehrsatz nach Pythagoras benannt  
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.

Ein Opfer hat Pythagoras geweiht  
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;  
Es taten kund, geschlachtet und verbrannt,  
Einhundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,  
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,  
Erheben ein unmenschliches Gebrülle;

Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;  
Und machtlos sich dem Licht zu widersetzen  
Verschließen sie die Augen und erzittern.

(zitiert nach Projekt Gutenberg, Alle Gedichte Adelbert von Chamisso)