Kegelschnitte

Ein Kegelschnitt ist eine ebene Kurve, die entsteht, wenn man die Oberfläche eines Kreiskegels bzw. Doppelkreiskegels mit einer Ebene schneidet (vgl.Abb.1).

Der Doppelkreiskegel seinerseits entsteht dabei dadurch, dass eine Gerade g um eine sie schneidende Achse A gedreht wird. Der Mantel des Kegels besteht dann aus der Gesamtheit aller Geraden (den sog. Mantellinien), die sich durch eben die Drehung von g um A ergeben. Die Lage der Schnittfläche zu den Mantelflächen bestimmt, welcher Kegelschnitt entsteht.

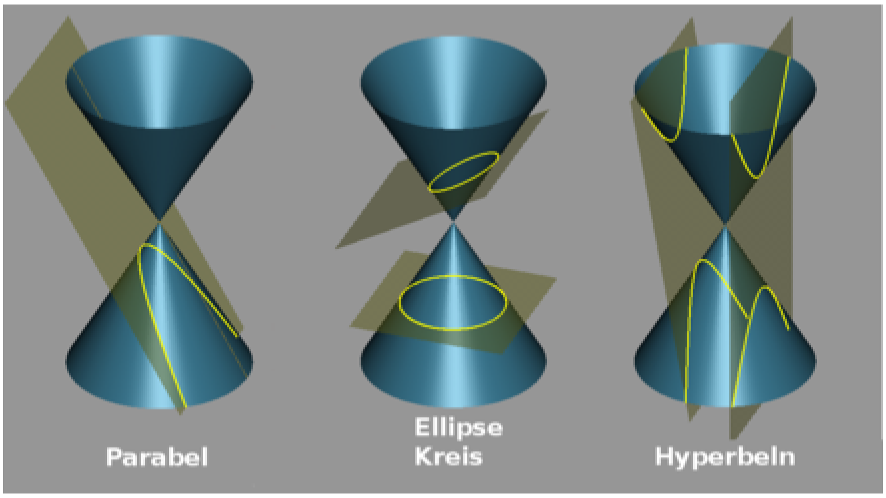

Abb.1

Falls die Spitze des Kegels (bzw. Doppelkegels) nicht in der jeweiligen Schnittebene liegt, können die folgende Kurven entstehen:

Eine **Parabel** entsteht, wenn die Schnittebene zu genau einer Mantellinie des Kegels parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen der Achse A und der Schnittebene gleich dem halben Öffnungswinkel des Kegels ist.

Eine **Ellipse** entsteht, wenn die Schnittebene zu keiner Mantellinie parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen der Achse A und Schnittebene größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so tritt der Kreis als Schnittkurve auf (als Spezialfall einer Ellipse).

Eine **Hyperbel** entsteht, wenn die Schnittebene zu zwei Mantellinien des Kegels parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der halbe Öffnungswinkel ist.

Im ERLEBNISLAND MATHEMATIK werden diese Kegelschnitte durch folgendes Experiment erzeugt:

In einem durchsichtigen kegelförmigem Behälter, dessen Hauptachse (per Hand) bis zu 90° geneigt werden kann, befindet sich eine (blau gefärbte) Flüssigkeit. Stellt man nun (per Hand) einen solchen Winkel ein, dann bildet die Begrenzungslinie der Flüssigkeit in diesem Behälter einen Kegelschnitt.

Abb.2

Klassifikation der Kegelschnitte

Wenn die Schnittebene die Kegelspitze nicht enthält, können folgende Figuren entstehen:

- Am Doppelkegel:
  - Eine Ellipse, wenn die Schnittebene zu keiner Mantellinie parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Schnittebene größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so tritt der Kreis als Spezialfall einer Ellipse auf.
  - Eine Parabel, wenn die Schnittebene zu genau einer Mantellinie des Kegels parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem halben Öffnungswinkel ist.
  - Eine Hyperbel, wenn die Schnittebene zu zwei Mantellinien des Kegels parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der halbe Öffnungswinkel ist.

- Am einfachen Kegel:
  - Die leere Menge, wenn die Ebene den Kegel nicht schneidet.
  - Eine Ellipse, wenn die Schnittebene zu keiner Mantellinie parallel ist und den Kegel schneidet. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Schnittebene größer als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Ist dieser Winkel ein rechter Winkel, so tritt der Kreis als Spezialfall einer Ellipse auf.
  - Eine Parabel, wenn die Schnittebene zu genau einer Mantellinie des Kegels parallel ist und den Kegel schneidet. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem halben Öffnungswinkel ist.
  - Ein Ast der Hyperbel, wenn die Schnittebene zu zwei Mantellinien des Kegels parallel ist. Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der halbe Öffnungswinkel ist.

Wenn die Schnittebene durch die Kegelspitze geht, entstehen die ausgearteten (auch: „entarteten“) Kegelschnitte:

- Am Doppelkegel:
  - Die leere Menge, wenn die Ebene den Kegel nicht schneidet.
  - Ein Punkt, wenn die Schnittebene den Kegel nur in der Spitze schneidet (ausgeartete Ellipse).
  - Eine Gerade, wenn die Schnittebene den Kegel entlang einer Mantellinie berührt (ausgeartete Parabel).
  - Zwei einander schneidende Geraden, wenn die Schnittebene zwei Mantellinien enthält (ausgeartete Hyperbel). Dann liegt die Kegelachse auf der Schnittebene.
- Am einfachen Kegel:
  - Die leere Menge, wenn die, wenn die Ebene den Kegel nicht schneidet.
  - Ein Punkt, wenn die Schnittebene den Kegel nur in der Spitze schneidet (ausgeartete Ellipse).
  - Ein Strahl (Halbgerade), wenn die Schnittebene den Kegel entlang einer Mantellinie berührt.
  - Zwei Strahlen (Halbgeraden) mit dem selben Ursprung, wenn die Schnittebene zwei Mantellinien enthält.

Die allgemeine Kegelschnittgleichung

Im ebenen kartesischen Koordinatensystem beschreiben die folgenden Gleichungen (mit den reellen Koeffizienten a, b, c, d, e und f) die Kegelschnitte:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \tag{*}$$

Der Typ des Kegelschnitts ergibt sich aus den im Folgenden definierten Determinanten $\triangle$ und δ sowie der Summe S:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + c$$

So ergeben sich zum Beispiel folgende Aussagen:

- Für $\delta > 0$ und $\triangle \cdot S < 0$ handelt es sich um eine Ellipse. Gilt zusätzlich $a = c$ und $b = 0$, so ist diese Ellipse sogar ein Kreis.
- Gelten die Bedingungen $\delta < 0$ und $\triangle \neq 0$, so ergibt sich eine Hyperbel, die im speziellen Fall $a + c = 0$ gleichseitig (rechtwinklig) ist.
- Unter den Voraussetzungen $\delta = 0$ und $\triangle \neq 0$ beschreibt die Gleichung (*) eine Parabel.
- Ist $\triangle = 0$ und $\delta < 0$, stellt die Lösung von (*) ein Geradenpaar dar.

Anwendungen und Beispiele

Abb.3: Kegelschnitte (Hyperbeln) als architektonisches Element: Kathedrale von Brasilia (O.Niemeyer,1970)

Eine Anwendung finden die Kegelschnitte in der Astronomie, da die Bahnen der Himmelskörper genäherte Kegelschnitte sind. Auch in der Optik werden sie verwendet - als Rotationsellipsoid für Autoscheinwerfer, als Paraboloid oder Hyperboloid für Spiegelteleskope usw..

Geschichtliches

Der Mathematiker Menaichmos (um 380 – 320 v.Chr.) untersuchte an der Akademie Platons die Kegelschnitte mit Hilfe eines Kegelmodells. Er entdeckte dabei, dass sich das sog. Delische Problem („Würfelverdopplung“) auf die Bestimmung von Schnittpunkten zweier Kegelschnitte zurückführen lässt. Euklid beschrieb im 3. Jahrhundert v. Chr. in vier (bisher nicht wieder aufgefundenen) Bänden seiner „Elemente“ die Eigenschaften von Kegelschnitten. Die gesamten Kenntnisse der Mathematiker der Antike über die Kegelschnitte fasste Appolonios von Perge (um 262 – 190 v.Chr.) in seinem achtbändigen Werk „Konika“ (deutsch: „Über Kegelschnitte“) zusammen. Die analytische Beschreibung der Gesamtheit der Kegelschnitte durch Gleichungen vom Typ (*) wurde von Pierre de Fermat (1607-65) und René Descartes (1596-1650) gefunden.

Literatur

Koecher, M. u. Krieg, A.: *Ebene Geometrie*, 3.Aufl., Berlin 2007