Gärtnerkonstruktion einer Ellipse

Eine Ellipse E ist die Menge aller Punkte $P(x, y)$ der x, y - Ebene, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 gleich $(= 2a)$ ist. Die Ellipsen gehören zur Klasse der Kegelschnitte (vgl. entsprechenden Artikel im INFORMATION POINT).

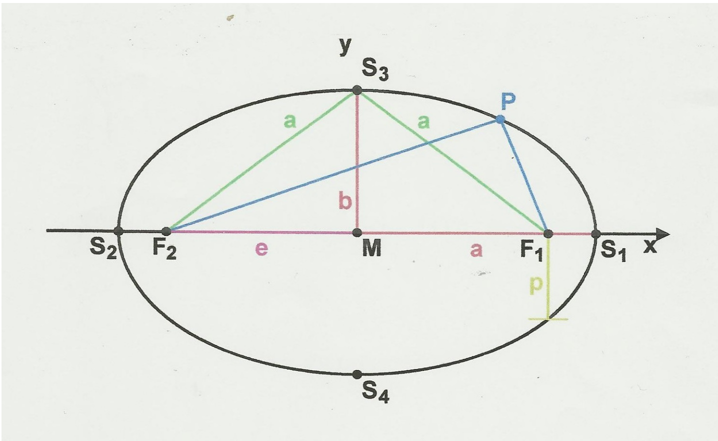

Abb.1

Die Punkte F_1 und F_2 heißen Brennpunkte. Der Mittelpunkt M ihrer Verbindungslinie (der Länge $2e$, e - Exzentrizität) wird als Mittelpunkt der Ellipse bezeichnet. Der Abstand von diesem Mittelpunkt M zu den zwei Scheitelpunkten S_1 und S_2 ist jeweils a und zu den Scheitelpunkten S_3 und S_4 ist jeweils b mit

$$b^2 + e^2 = a^2, \quad \text{d.h.} \quad b = a^2 - e^2.$$

Die Verbindungslinie zwischen einem Brennpunkt F_1 oder F_2 (Focus) und einem Punkt der Ellipse heißt Leitstrahl oder Brennstrahl. Die Bezeichnung Brennpunkt und Brennstrahl resultieren aus der Eigenschaft, dass der Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen in einem Punkt der Ellipse durch die Normale (Gerade, senkrecht zur Tangente) in diesem Punkt halbiert wird. Damit ist der Einfallswinkel, den der eine Brennstrahl mit der Tangente bildet, gleich dem Ausfallswinkel, den die Tangente mit dem anderen Brennstrahl bildet. Folglich wird ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt, z.B. F_1, ausgeht, an der Ellipsentangente so reflektiert, dass er den anderen Brennpunkt trifft. Bei einem ellipsenförmigen Spiegel treffen sich demnach alle von einem Brennpunkt ausgehenden Lichtstrahlen im anderen Brennpunkt.

Ist die Exzentrizität $e = 0$, so gilt $F_1 = F_2$. Die Ellipse wird zu einem Kreis mit dem Radius $r = a = b$.

Eine einfache Möglichkeit, eine Ellipse genau zu zeichnen, ist die sogenannte **Gärtnerkonstruktion**. Sie benutzt direkt die Ellipsendefinition:
Um ein ellipsenförmiges Blumenbeet zu erstellen, schlägt man zwei Pflöcke in die Brennpunkte und befestigt daran die Enden einer Schnur mit der Länge $2a$. Nun spannt man die Schnur und fährt mit einem Markierungsgerät an ihr entlang. Da diese Methode neben Zirkel und Lineal zusätzliche Hilfsmittel - eben eine Schnur - benötigt, handelt es sich nicht um eine Konstruktion der klassischen Geometrie. Im ERLEBNISLAND MATHEMATIK ist diese Konstruktion mittels eines einfachen Experiments nachvollziehbar.

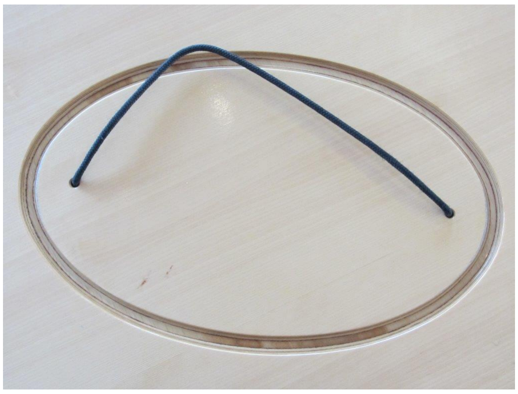

Abb.2

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Im Folgenden wird die Ellipsengleichung aus der oben beschriebenen „Gärtnerkonstruktion" hergeleitet:

Für einen Punkt $P = P(x, y)$ der Ellipse gilt – entsprechend obiger Abbildung –

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a,$$

d.h.,

$$\sqrt{y^2 + (x+e)^2} + \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = 2a.$$

Durch Quadrieren dieser Gleichung erhält man

$$y^2 + (x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 - 4a^2 = -2a\sqrt{(y^2 + (x+e)^2)(y^2 + (x-e)^2)}$$

und folglich

$$2y^2 + 2x^2 + 2e^2 - 4a^2 = -2a\sqrt{(y^2 + (x+e)^2)(y^2 + (x-e)^2)}.$$

Mittels erneuten Quadrierens ergibt sich

$$4(y^2 + x^2 + e^2 - 2a^2)^2 = 4a^2(y^2 + (x+e)^2)(y^2 + (x-e)^2)$$

und durch Vereinfachung – also geeignetes „Kürzen“ –

$$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 + a^2e^2 - (a^2)^2 = 0,$$

d.h.

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Wegen $b^2 = a^2 - e^2$ (s.o.) ergibt sich dann die Normalform (auch „Mittelpunktsform“) einer Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zusätzliche Bemerkung:

Das sog. Erste Keplersche Gesetz („Ellipsensatz“, „Planetensatz“) besagt, dass die Umlaufbahn eines Trabanten eine Ellipse ist. Einer ihrer Brennpunkte liegt im Schwerezentrum des Systems.

Dieses Gesetz ergibt sich aus Newtons Gravitationsgesetz, sofern die Masse des Zentralkörpers wesentlich größer als die der Trabanten ist und die Wechselwirkung des Trabanten auf den Zentralkörper vernachlässigt werden kann.

Folglich bewegen sich nach dem ersten Keplerschen Gesetz alle Planeten auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, wobei diese in einem der beiden Brennpunkte steht. Entsprechendes gilt für die Bahnen von wiederkehrenden (periodischen) Kometen, Planetenmonden oder Doppelsternen.

Literatur

Schupp,H.: *Kegelschnitte*, Mannheim 1988