Archimedische Schraube

In der Dresdner Sammlung „Alte Meister“ befindet sich das berühmte Bild des italienischen Malers Domenico Fetti (1588–1623), das einen der bedeutendsten Mathematiker der Antike zeigt, Archimedes von Syrakus (etwa 287 v.Chr. – 212 v.Chr.). Noch bei der Entwicklung der höheren Analysis im 16. und 17. Jahrhundert stützen sich die Mathematiker auf die Vorarbeiten von Archimedes.

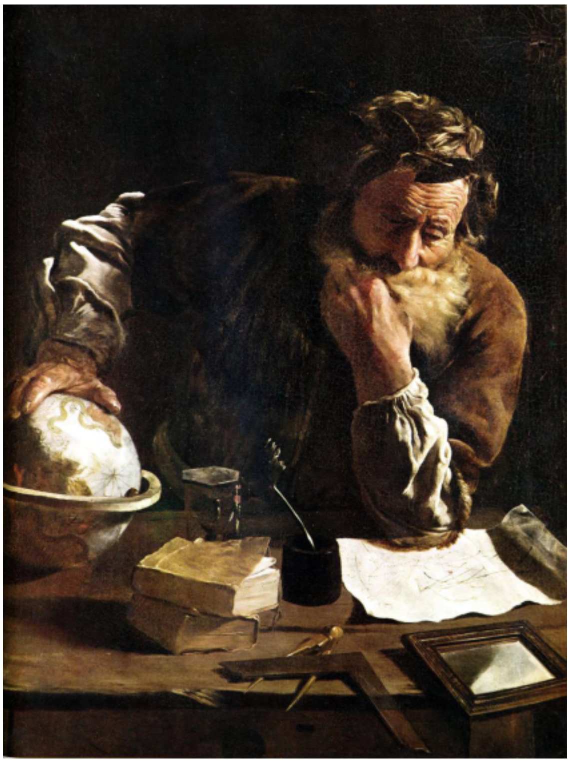

Abb.1

Einer Legende nach soll Archimedes nach der Eroberung von Syrakus durch die Römer im zweiten Punischen Krieg (218–201 v.Chr.) dem römischen Soldaten, der ihn verhaften wollte, als er geometrische Figuren in den Sand zeichnete, zugerufen haben: Noli turbare circulos meos (Störe meine Kreise nicht!), worauf jener wutentbrannt den großen Gelehrten mit einem Schwert erschlagen haben soll.

Auf Archimedes geht eine Reihe mathematischer und physikalischer Erkenntnisse zurück. Er beschrieb den Auftrieb von Körpern in Flüssigkeiten und Gasen, der später als Archimedisches Prinzip bezeichnet wurde. Er berechnete näherungsweise mittels eines 6144–Ecks die Kreiszahl π, formulierte das Hebelgesetz und entwarf den „Greifer des

Archimedes“ zur Zerstörung feindlicher Schiffe, und er entwickelte die als Archimedische Schraube bekannte Schrauben- oder Schneckenpumpe zur Bewässerung von Feldern und Äckern. Ihr entscheidendes Bauteil ist ein schraubenförmiges Element, die sog. Schnecke, die um ihre Mittelachse drehbar ist und Wasser von einem niedrigen Niveau auf ein höheres Niveau heben kann.

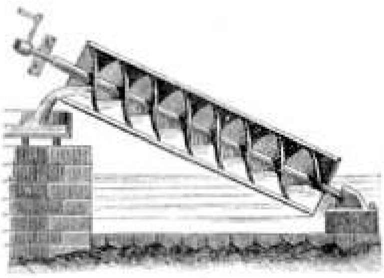

Abb.2

Im Erlebnisland Mathematik befindet sich eine Archimedische Schraube im εpsilon, dem „Erlebnisland für Kleine“, um (im Plenulum) die Kugeln von der unteren auf die obere Ebene anzuheben.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Die archimedische Schraube ist eine spezielle reguläre Schraubfläche. Diese entsteht in folgender Weise durch eine sogenannte Schraubung um eine Achse, d.h. jeder Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ geht dabei durch eine Drehung und eine Schiebung in einen Punkt $P = P(x, y, z)$ über. Verwendet man die positiv orientierte z–Achse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem („Kartesisches Koordinatensystem“) als orientierte Schraubachse a und seien der orientierte Drehwinkel φ sowie l die orientierte Schieblänge, so ist mit $p = \frac{l}{2}$:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad x = x_0 \cdot \cos\varphi - y_0 \cdot \sin\varphi \\
&(2) \quad y = x_0 \cdot \sin\varphi + y_0 \cdot \cos\varphi \\
&(3) \quad z = z_0 + p \cdot \varphi.
\end{aligned}
$$

Das heißt, die Gleichungen (1), (2), (3) beschreiben die Drehung um den Winkel φ (um die z–Achse) und eine Schiebung (in Richtung der z–Achse) um die Strecke $p \cdot \varphi$.

Eine Schraubfläche entsteht nun, in dem man nicht nur einen Punkt P einer Drehung und einer Schiebung unterwirft, sondern eine räumliche Kurve e, die durch eine Parameterdarstellung der Form gegeben ist:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t) \\ y_0 &= y_0(t) \\ z_0 &= z_0(t). \end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung der so entstehenden Schraubfläche ist dann

$$\begin{aligned} &(1^*) \quad x = x_0(t) \cdot \cos\varphi - y_0(t) \cdot \sin\varphi \\ &(2^*) \quad y = x_0(t) \cdot \sin\varphi + y_0(t) \cdot \cos\varphi \\ &(3^*) \quad z = z_0(t) + p \cdot \varphi. \end{aligned}$$

mit den reellen Parametern t und φ.

Die Archimedische Schraube ergibt sich als ein Spezialfall einer regulären Schraubenfläche, wenn man als Raumkurve e die positive reelle Achse wählt, d.h.

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t) = t \\ y_0 &= y_0(t) = 0 \\ z_0 &= z_0(t) = 0 \end{aligned}$$

($t > 0$). Sie hat folglich die Darstellung

$$\begin{aligned} &(1^*) \quad x = t \cdot \cos\varphi \\ &(2^*) \quad y = t \cdot \sin\varphi \\ &(3^*) \quad z = p \cdot \varphi \end{aligned}$$

($0 < t < T$, $0 < \varphi < 2k\pi$). Dabei ist T die Länge der erzeugenden Geraden l und k die Anzahl der Drehungen von e um die z–Achse (vgl. Abb.3).

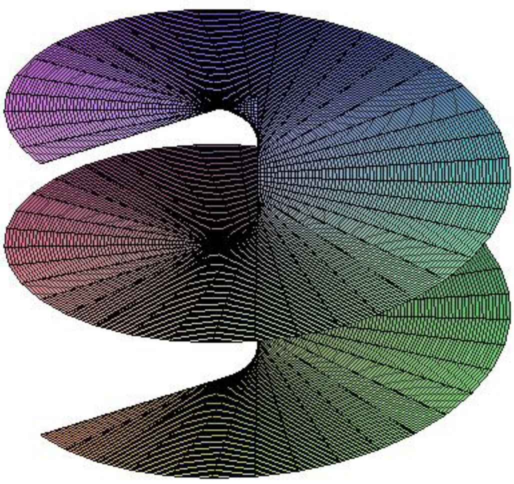

Abb.3

Literatur

[1] Klix, W.–D.: *Konstruktive Geometrie,* Leipzig 2001

[2] Schneider, I.: *Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker,* Darmstadt 1979

[3] Wünsch, V.: *Differentialgeometrie, Kurven und Flächen,* Leipzig 1997