Der „Sinus“ (als Abwicklung des ebenen Schnittes eines Kreiszylinders)

Abb.1

Wie diese Abbildung einer aufgeschnittenen Geflügelwurst zeigt – und wie wir es tagtäglich „beim Fleischer“ sehen – werden Würste sehr oft schräg aufgeschnitten. Die Geometrie lehrt uns, dass dann die Schnittfläche nicht durch einen Kreis, sondern durch eine Ellipse begrenzt wird. Schneidet man die Wurstschale parallel zur „Hauptachse“ der Wurst auf und legt diese auf eine ebene Unterlage, so wird aus dem zunächst „räumlichen Schnitt“ eine ebene Kurve, die einen Teil einer sogenannten Sinuskurve darstellt, d.h. einer harmonischen Schwingung.

Das zugehörige Exponat im ERLEBNISLAND MATHEMATIK (vgl. Abb.2) zeigt, wie mittels einer Handkurbel der ebene, schräge Schnitt eines geraden (Kreis-) Zylinders auf eine endlose Folie abgebildet wird. Die Abbildung auf der Folie erweist sich als eine harmonische Schwingung. Sie wird mathematisch durch eine Winkelfunktion (am rechtwinkligen) Dreieck, die sog. Sinusfunktion, beschrieben.

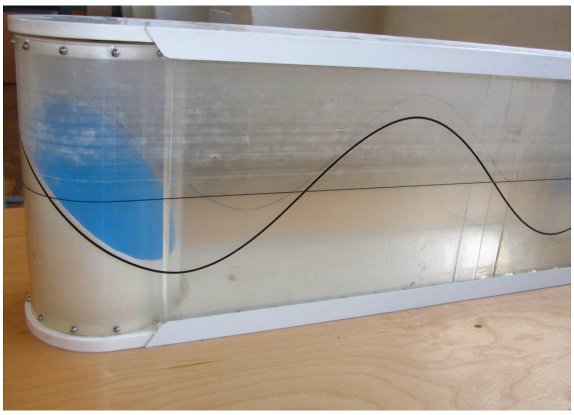

Abb.2: Abbildung des Exponats

Und nun...

...die Mathematik dazu:

1. Definition der Sinusfunktion:

Entsprechend der folgenden Abbildung 3 ist der Sinus (auch: Sinusfunktion)

$$\sin(\alpha)$$

eines Winkels α die Länge der sog. Gegenkathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge eins.

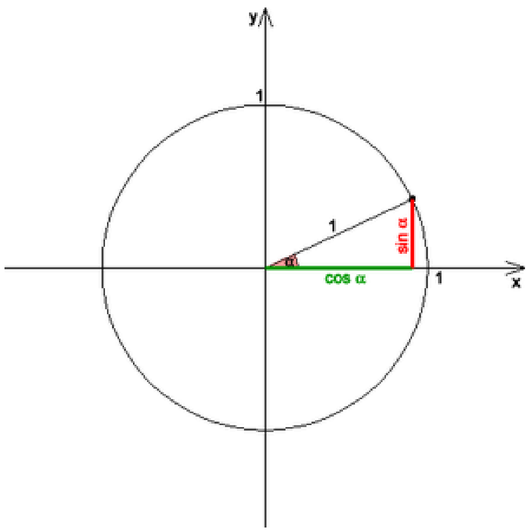

Abb.3

Mittels eines Einheitskreises ($r = 1$) ordnet man jedem Winkel α die Länge des Bogens

$$x = x(\alpha)$$

über diesem Winkel α zu.

Unter Beachtung der Tatsache, dass der Umfang des Einheitskreises ($r = 1$) gleich 2π ist, ergibt sich für das zugehörige Bogenmaß $x = x(\alpha)$:

α	$x(\alpha)$
$0°$	0
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$180°$	π
$270°$	$3\frac{\pi}{2}$
$360°$	2π

Die Sinusfunktion $f: y = f(x) = \sin(x)$ ist durch

$$\sin(x) = \sin(x(\alpha))$$

definiert.

Die Länge der sog. Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge 1 über dem Winkel α mit der Bogenlänge $x = x(\alpha)$ wird als Kosinus (auch: Kosinusfunktion)

$$\cos(x(\alpha)) = \cos(x)$$

mit

$$x = x(\alpha)$$

bezeichnet.

2. Abwicklung des ebenen Schnittes

Ein (gerader) Kreiszylinder mit dem Radius r für den Basiskreis (im ERLEBNISLAND MATHEMATIK ist $r = 60$ mm) wird wegen

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$$

(Satz des Pythagoras am Einheitskreis) durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$x(\varphi) = r\cos(\varphi), \quad \text{d.h.} \quad x = r\cos(\varphi) \tag{1}$$

$$y(\varphi) = r\sin(\varphi), \quad \text{d.h.} \quad y = r\sin(\varphi) \tag{1a}$$

$$z(\varphi) = z, \quad \text{d.h.} \quad z = z \tag{1b}$$

Dabei sind r und φ die sogenannten Polarkoordinaten, wie es die Abb. 4 zeigt:

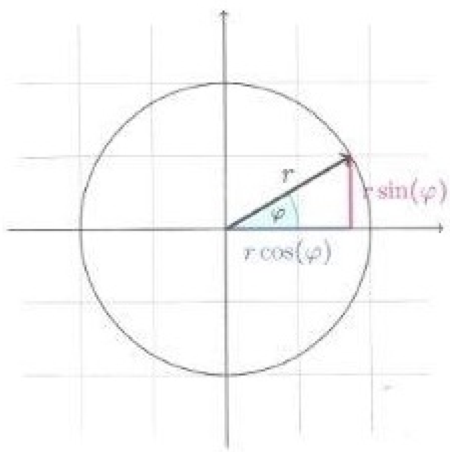

Abb.4

Ein ebener Schnitt des Kreiszylinders (unter dem Winkel von 45°) ist durch die Winkelhalbierende in der (y, z)-Ebene

$$z = y \tag{2}$$

gegeben. Aus den Gleichungen (1a) und (2) folgt somit

$$z = r \sin(\varphi) \quad \text{für} \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Diese Sinusfunktion ist mit $r = 60$ mm auf der abzuwickelnden Folie beim entsprechenden Exponat im ERLEBNISLAND MATHEMATIK sichtbar.