Schwingende Kugeln

Im Februar 1991 veröffentlichte der amerikanische Physiker Richard E. Berg (University of Maryland) im „American Journal of Physics“ eine interessante („fascinating“) Studie zu schwingenden mathematischen Pendeln. Den Impuls dazu gab ein Video, das C. Alley (ebenfalls Universität von Maryland) an der Moskauer Staatlichen Universität aufnahm, an der er 1987 zu einem Studienaufenthalt weilte.

Im ERLEBNISLAND MATHEMATIK wird mit einem Experiment das Verhalten von Schwingungen mathematischer Pendel erlebbar gemacht, wobei die Idee von Richard E. Berg aber experimentell in anderer Form realisiert wird.

Wie die folgende Abb. 1 zeigt, hängen 13 Metallkugeln an unterschiedlich langen (mathematischen) Fadenpendeln, die an einer krummlinig verlaufenden Aufhängung befestigt sind.

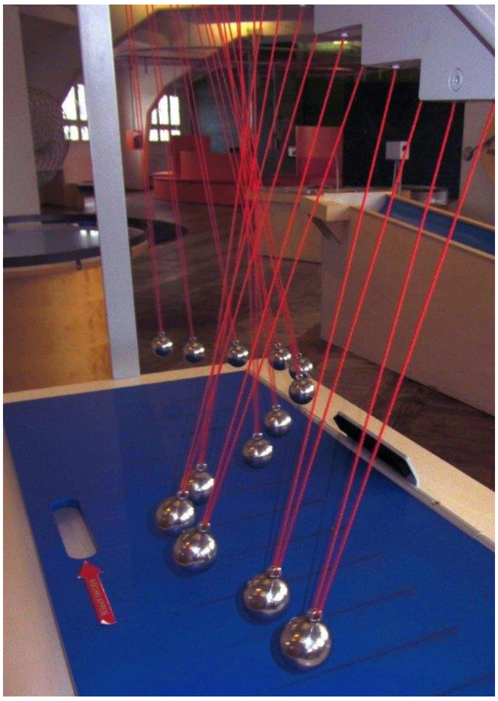

Abb.1

Bei diesem Experiment löst man durch Absenken der – blaufarbigen – Schiene (vgl. Abb.1) gleichzeitig die Schwingung aller 13 Kugeln aus. Sie verlassen dabei zur selben Zeit ihre jeweiligen Maximalauslenkungen. So schwingen sie für den Beobachter zunächst scheinbar regellos „hin und her“.

Beobachtet man über längere Zeit die Schwingungen der Kugeln, so entdeckt man folgendes Verhalten:

Beim „Start“ beginnen die Schwingungen aller mathematischen Pendel gleichzeitig und gehen danach in eine diskret sinusartige Form über, deren Amplituden kontinuierlich größer werden. Wenn die größte Anzahl von Amplituden dieser „schwingenden Erscheinung“ erreicht ist, ist die Schwingungsrichtung eines jeden Pendels der Schwingungsrichtung seiner Nachbarn entgegengesetzt. (Das erste und letzte Pendel haben natürlich nur einen Nachbarn!). Also schwingt jedes zweite Pendel in der gleichen Richtung. Es entsteht optisch der Eindruck als würden die Pendel zeitweilig in zwei auf einander zulaufenden „Fronten“ schwingen und sich dann wieder „verzahnen“. Schließlich kann man wieder eine diskrete Sinusschwingung der Kugeln beobachten, deren Amplitude abnimmt, bis sie wieder **gemeinsam** ihre Ausgangslage (bei dem Experiment im ERLEBNISLAND MATHEMATIK nach 40 Sekunden) erreichen. Natürlich klingt der so beschriebene Vorgang mit der Zeit ab, da die Reibung als eine diese Pendelbewegungen bremsende Kraft auftritt (d.h. die maximalen Auslenkungen der einzelnen Pendel werden nach und nach kleiner, bis zum vollständigen Stillstand).

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Bezeichne $A(n)$ die Anzahl der Schwingungen des n-ten Pendels ($n = 1, ..13$) im Zeitraum $T = 40$ s. Dann ist bei Vorgabe einer Schwingungsdauer von zwei Sekunden für das längste Pendel und unter der Voraussetzung, dass sich die Anzahl der Schwingungen benachbarter Pendel im Zeitintervall T um 1 unterscheiden, d.h.

$$A(n+1) = A(n) + 1,$$

$$A(n) = 19 + n.$$

Das n-te Pendel hat dann eine Schwingungsdauer $T(n)$, $n = 1, ..., 13$:

$$T(n) = \frac{40}{19+n}$$

Wegen des Zusammenhanges zwischen Schwingungsdauer $T(n)$ und Länge $l(n)$ des mathematischen (Faden-)Pendels:

$$T(n) = \sqrt{\frac{l(n)}{g}} \cdot 2\pi$$

erhält man für die Längen $l(n)$ der Pendel $n = 1, ..., 13$:

$$l(n) = \frac{T(n)^2 \cdot g}{(2\pi)^2} \tag{*}$$

Die konkreten Werte $l(n)$ (Angabe in m) für das Exponat im ERLEBNISLAND MATHEMATIK sind folgender Tabelle (1) zu entnehmen.

Tabelle 1:

n	$l(n)$
1	0.9940
2	0.9016
3	0.8215
4	0.7516
5	0.6903
6	0.6361
7	0.5881
8	0.5454
9	0.5071
10	0.4728
11	0.4418
12	0.4137
13	0.3883

Für die Kreisfrequenz $\omega(n)$ des n-ten Pendels ergibt sich dann wegen

$$\omega(n) = \frac{2\pi}{T(n)}$$

die Gleichung

$$\omega(n) = \sqrt{\frac{g}{l(n)}} \quad \text{für } n\text{=1,...,13.}$$

Für die konkrete Form der Kugelpendel im ERLEBNISLAND MATHEMATIK ergeben sich dann folgende Kreisfrequenzen $\omega(n)$ (in s^{-1}):

Tabelle 2:

n	$\omega(n)$
1	3.1416
2	3.2987
3	3.4558
4	3.6128
5	3.7700
6	3.9270
7	4.0841
8	4.2412
9	4.3982
10	4.5553
11	4.7124
12	4.8695
13	5.0265

Die Momentanwinkel $\alpha_n(t)$ zur Zeit t der dreizehn mathematischen Pendel $(n = 1, ...13)$ besitzen die Bewegungsgleichungen

$$\alpha_n(t) = \alpha_{max}(n)\ sin\left(\omega(n)t + \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, ..., 13.$$

Dabei ist

$$\alpha_{max}(n) = arcsin\left(\frac{L}{l(n)}\right)$$

mit $L = 0.33$ m als horizontalem Abstand der Kugeln in der Auslage beim „Start“ und der jeweiligen Vertikalen unter ihrer Aufhängung.

Für diese Werte $\alpha_{max}(n)$, $n = 1, ..., 13$ erhält man für das betrachtete Experiment im Bogenmaß (und ... in Radian):

Tabelle 3:

n	$\alpha_{max}(n)$ (Bogenmaß)	$\alpha_{max}(n)$ (Radian)
1	0.3384	19.39°
2	0.3747	21.47°
3	0.4134	23.69°
4	0.4548	26.04°
5	0.4985	28.56°
6	0.5454	31.25°
7	0.5957	34.13°
8	0.6499	37.23°
9	0.7085	40.60°
10	0.7727	44.27°
11	0.8436	48.33°
12	0.9234	52.91°
13	1.0159	58.20°

Für die ausgewählten Pendel $n = 1, 6, 11$ ergibt sich dann der momentane Ausschlagwinkel (zur Zeit t) im Bogenmaß in einer grafischen Darstellung für $t = 0$ bis $t = 10$ s:

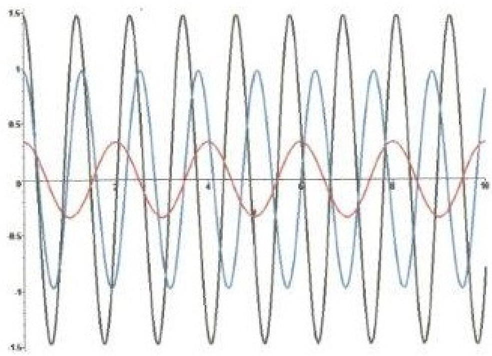

Abb.2

Bemerkung: Aus der Gleichung (*) resultiert, dass die obere begrenzende Linie der Aufhängungen einer Gleichung der Form

$$y = f(x) = \frac{g}{(2\pi)^2}\left(\frac{40}{19 + x - 13}\right)^2 \quad (0 \leq x \leq 13)$$

genügt, wobei eine Längeneinheit von x dem Abstand je zweier benachbarter Kugeln in der Ruhelage entspricht. In der folgenden grafischen Darstellung wurde für diese Längeneinheit der Wert 1 gewählt:

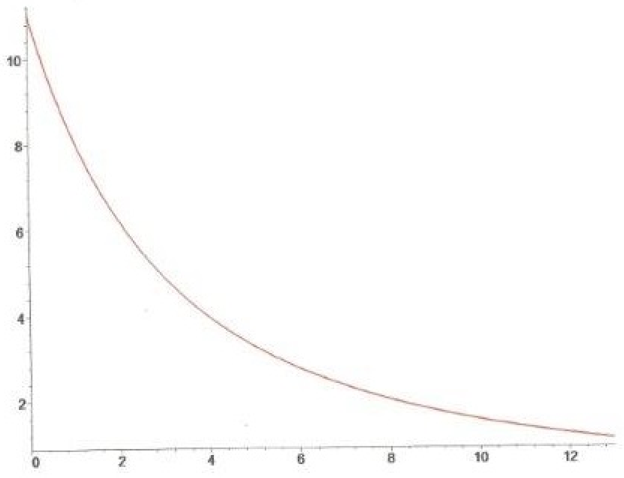

Abb.3