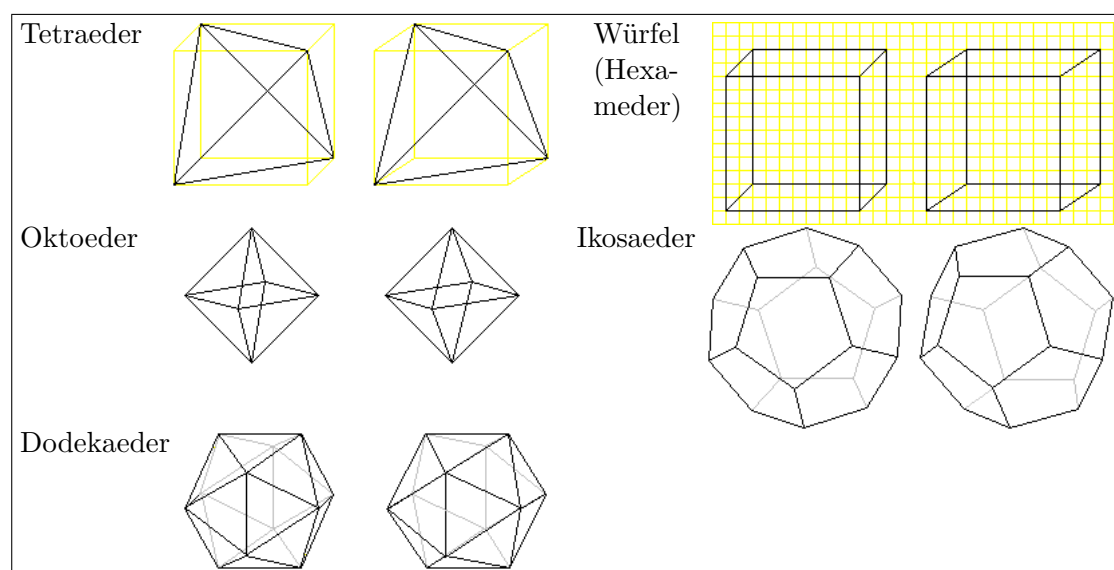


Platonische Körper

Die Platonischen Körper (oder: Ideale Körper, reguläre Polyeder- „Vielflächner“) sind konvexe Körper mit einer größtmöglichen Regelmäßigkeit, die nach dem griechischen Philosophen Platon (427–347 v.Chr.) benannt wurden. (Ein Körper heißt konvex, wenn mit zwei beliebigen Punkten P und Q auf dessen Oberfläche auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen P und Q zu diesem Körper gehören.)

Diese (größtmögliche) Regelmäßigkeit besteht darin, dass bei jedem dieser Körper die Seitenflächen zueinander kongruent („deckungsgleich“) sind.

Es gibt genau fünf Platonische Körper:



Im Einzelnen haben diese fünf Körper folgende Eigenschaften:

	Seitenflächen	Anzahl der Flächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Anzahl der an einer Ecke zusammentreffenden Flächen
Tetraeder	gleichseitige Dreiecke	4	4	6	3
Würfel (Hexameter)	Quadrate	6	8	12	3
Oktaeder	gleichseitige Dreiecke	8	6	12	4
Dodekaeder	regelmäßige Fünfecke	12	20	30	3
Ikosaeder	gleichseitige Dreiecke	20	12	30	5

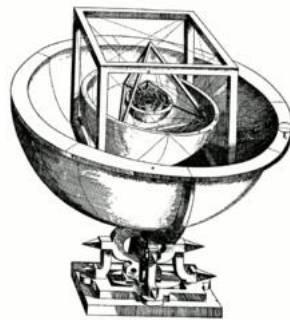
Die Platonischen Körper spielen geistesgeschichtlich von der griechischen Antike über das Mittelalter bis in unsere Zeit hinein eine bedeutende Rolle. Den Schülern des Pythagoras waren im 6. Jahrhundert v. Chr. Tetraeder, Hexameter (= Würfel) und Dodekaeder wohlbekannt. Theaitetos (4.Jh.v.Chr.) waren auch Oktaeder und Ikosaeder bekannt.

Platon hat die später nach ihm benannten Körper in seinem Werk *Timaios* ausführlich beschrieben und den vier Elementen, die nach damaliger Auffassung die „Weltbausteine“ waren, in folgender Weise zugeordnet:

Tetraeder – Feuer
Würfel (Hexaeder) – Erde
Oktaeder – Luft
Ikosaeder – Wasser.

Das später hinzu gekommene fünfte Element „Äther“ (das in der Antike als „oberer Himmel“ interpretiert wurde und dessen Existenz bis in das 19. Jahrhundert eine besondere Rolle in der Physik spielte) wurde dem Dodekaeder zugeordnet.

Berühmt ist auch der Versuch des Astronomen Johannes Kepler (1571–1630), im Jahre 1596 in seinem Werk *Mysterium Cosmographicum*, die (mittleren) Bahnradien der sechs damals bekannten Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn) durch eine bestimmte Reihenfolge der fünf Platonischen Körper und ihrer Innen- und Außenkugeln zu beschreiben:



Und nun...

...die Mathematik dazu:

Bereits Euklid (etwa 300 v.Chr.) bewies in seinem berühmten Werk *Die Elemente*, dass es genau fünf dieser Platonischen Körper gibt.

Dazu führen folgende Überlegungen:

Die Summe der Winkel in einem n -Eck ist

$$(n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Also hat jeder Winkel bei einem regulären n -Eck den Wert

$$(n - 2) \cdot \frac{180^\circ}{n}$$

(z.B. bei einem gleichseitigen Dreieck 60° , bei einem Quadrat 90° , bei einem regelmäßigen Fünfeck 108°).

Bezeichnet N die Anzahl der Flächen, die in einer Ecke eines Platonischen Körpers aufeinanderstoßen, so muss die Summe deren Winkel kleiner als 360° sein, d.h.

$$N \cdot (n - 2) \cdot \frac{180^\circ}{n} < 360^\circ$$

und daraus folgend

$$N \cdot (n - 2) < 2n,$$

was wiederum zur Ungleichung

$$(N - 2) \cdot (n - 2) < 4 \quad (*)$$

Äquivalent ist.

Da $n > 2$ ist (jede der begrenzenden Flächen hat mindestens drei Ecken!) und $N > 2$ (in jeder Ecke des Körpers treffen mindestens drei Flächen zusammen!), erfüllen nur fünf Paare (n, N) natürlicher Zahlen (jeweils größer als 2) die Ungleichung (*), nämlich

- (3,3) – Tetraeder,
- (3,4) – Oktaeder,
- (3,5) – Ikosaeder,
- (4,3) – Würfel,
- (5,3) – Dodekaeder.

Literatur

- [1] Adam, P., und A. Wyss: *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*, Stuttgart 1994
- [2] Beutelspacher, A. u.a.: *mathematik zum anfassen*, Mathematikum, Gießen 2005
- [3] Euklid: *Die Elemente*, Buch XIII, § 18a. Bücher I–XIII. Hrsg. u. übs. v. Clemens Thaer, 4. Auflage, Frankfurt a.M. 2003
- [4] Kepler, J.: *Mysterium cosmographicum. De stella nova*. Hrsg. Max Caspar, München 1938, 1993
- [5] Tiberiu, R.: *Reguläre und halbrekuläre Polyeder*, Berlin 1987