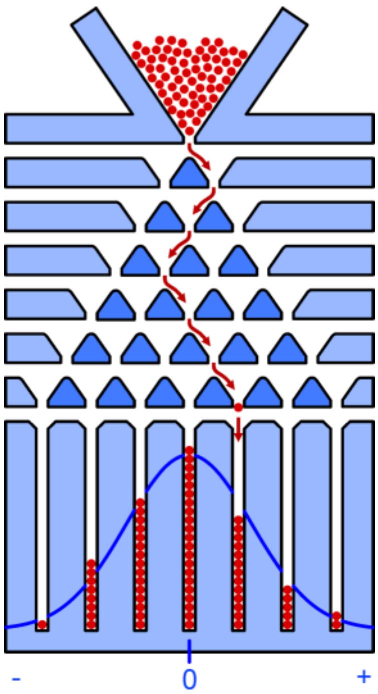
Galton - Brett

Am Ende des 19. Jahrhunderts entwickelte der englische Universalgelehrte Sir Francis C. Galton (1822–1911) eine Anordnung zur Demonstration der sog. Binomialverteilung. Diese Anordnung bezeichnete man später ihm zu Ehren als Galton–Brett.

So sieht es aus:

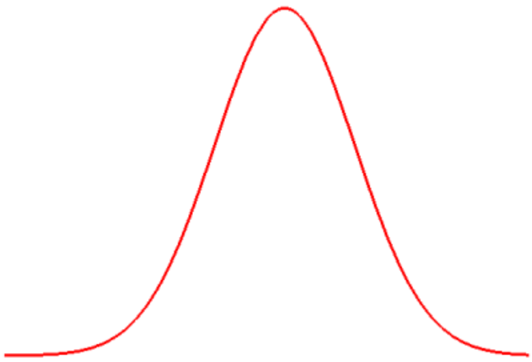
Auf einem senkrecht aufgestellten Brett sind mehrere Nägel oder entsprechende Hindernisse befestigt, die wie gleichmäßige Dreiecke angeordnet sind und zusammen – als Gesamtstruktur – ein gleichseitiges Dreieck bilden.



Und...

...so „funktioniert“ das Galtonsche Brett: :

Lässt man nun mehrere Kugeln (im Erlebnisland Mathematik: Münzen) senkrecht von oben durch das Nagelbrett fallen, entscheidet sich an jedem dieser Hindernisse zufällig, ob die Kugeln (oder Münzen) nach rechts oder links fallen. Die Wahrscheinlichkeit nach rechts oder links zu fallen, beträgt jeweils $p = 0,5$. An der unteren Kante des Galton–Brettes befinden sich dann mehrere Fächer, in denen sich die Kugeln (oder Münzen) übereinander stapeln. Das heißt, es entsteht mittels der übereinander liegenden Kugeln (oder Münzen) in diesen Fächern eine Art Balkendiagramm, das mit zunehmender Anzahl eingefallener Kugeln (oder Münzen) näherungsweise die Dichte einer Normalverteilung bildet. Die Form dieser Dichte ist eine glockenförmige Kurve („Gauß'sche Glockenkurve"):



Im Einzelnen sieht das Experiment mit dem Galtonschen Brett im Erlebnisland Mathematik folgendermaßen aus:

Der Weg einer Kugel (oder einer Münze) von oben nach unten durch das Galton–Brett, entspricht einem Pfad in einem sog. Baumdiagramm. Die Anzahlen der Kugeln (oder Münzen) in den einzelnen Fächern spiegeln die Wahrscheinlichkeit der zufälligen Auswahl der benutzten Pfade wider.

Führt man dieses Experiment mit einer genügend großen Anzahl von Kugeln (oder Münzen) durch, lässt sich beobachten, dass sich die meisten Kugeln (oder Münzen) in mittleren Fächern sammeln. Die außen liegenden Fächer hingegen enthalten die geringste Anzahl von Kugeln (oder Münzen). Die Verteilung der Kugeln (oder Münzen) in den Fächern entspricht einer sog. Binomialverteilung (mit den Parametern $p = 0,5$ (s.o.) und n, der Anzahl der verwendeten Kugeln (oder Münzen)).

Zur Durchführung dieses Versuchs im Erlebnisland Mathematik werfe man Münzen (1 Cent oder 2 Cent oder ... oder 50 Cent) durch die entsprechende Öffnung an der Oberseite des Galton–Bretts.

Man beobachte nun, wie sich die Anzahl der Münzen in den einzelnen Fächern verteilt.

Bemerkung: Die für ein Experiment am Galton–Brett eingeworfenen Münzen kommen später als ein Beitrag zur Arbeit des gemeinnützigen(!) Vereins

zur Förderung der Arbeit des Erlebnislandes Mathematik zugute. So entstand der Name „GELDTONBRETT“ für dieses Exponat.

Und nun...

...die Mathematik dazu:

Auf dem Weg in eines der 13 Fächer $F_0, F_1, \ldots, F_{12}$ am unteren Ende des Galton–Brettes wird jede Münze genau 12 – mal zufällig (jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$) nach rechts oder links gelenkt.

Offenbar gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12} = 4096$ verschiedene Wege. Wenn man realistischerweise voraussetzt, dass sich die Ablenkungen der Münze (auf dem Weg „nach unten“) an den einzelnen nagelartigen Hindernissen voneinander unabhängig vollziehen, erhält man für die Wahrscheinlichkeit p_N, dass diese das Fach F_n erreicht:

$$p_N(n) = \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}, \quad \text{mit } n = 0, 1, 2 \ldots, N$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p_N(n)$ – im Erlebnisland Mathematik ist $N = 12$ und $p = 0,5$ – sind dabei die sog. Einzelwahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung mit den Parametern N und p.

Der Sachverhalt, dass die Binomialverteilung für „große“ Werte N durch die Normalverteilung approximiert wird, das heißt angenähert wird, beschreibt der sog. Grenzwertsatz von Moivre–Laplace:

$$\sum_{n\colon a \le \frac{n-\mu}{\sigma} \le b} p_N(n) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z \quad (\text{für } N \to \infty), \quad \mu = Np, \quad \sigma^2 = Np(1-p).$$