# Beweis ohne Worte: Summe n

Die hier gezeigten „Beweise ohne Worte“ sind so überzeugend, dass man sie tatsächlich für Beweise hält, obwohl es aus der Sicht des Mathematikers keine sind. Sie eignen sich aber sehr gut, um schnell zu einem mathematischen Beweis zu finden. Warum? Die dargestellte Vermutung wird nicht allgemeingültig bewiesen, sondern nur für einige Fälle, z.B. bis $n = 6$. Ein mathematisch vollständiger Beweis müsste alle möglichen natürlichen Zahlen $n$, also unendlich viele Fälle, abdecken. Das würde man für diese Beispiele hier mit dem *Beweisprinzip der vollständigen Induktion* machen. Sehr gut geeignet sind die Exponate allerdings, um eine passende Vermutung für eine allgemeine Formel aufzustellen. Dies ist sehr wichtig, denn ohne Vermutung hat man auch nichts, was man beweisen könnte. Außerdem kann man sich nach genauem Beobachten vorstellen, wie der nächste Schritt, dann der übernächste und immer so weiter aussehen würde, was für eine gute Begründung des Sachverhalts ausreicht. Beim Beweis durch vollständige Induktion wird im Prinzip nichts anderes gemacht. Ein solcher Beweis besteht aus zwei Teilen: dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt. Zunächst zeigt man an einem einfachen Fall (meist $n = 1$), dass die aufgestellte Vermutung dafür richtig ist. Dieser erste Schritt wird Induktionsanfang genannt. Dann wird, ausgehend von der Annahme, dass die Vermutung für ein (beliebiges) $n$ richtig ist, gezeigt, dass die Vermutung dann auch für $n+1$ gilt. Veranschaulicht wird das oft durch das Bild einer Leiter, auf der man schon bis zur $n$-ten Stufe geklettert ist, und von dort immer auf die nächste, $(n + 1)$-te Stufe kommt. Wie die Menge der natürlichen Zahlen ist auch diese Leiter als unendlich gedacht. Das Exponat zu der Summer der ungeraden Zahlen besteht aus L-förmigen Plastikteilen unterschiedlicher Größen. Das erste Teil besteht aus einem Kästchen, das zweite aus 3, das dritte aus 5,..., das $n$-te Teil aus $(2n - 1)$ Kästchen. Wenn man die Anzahl all dieser Kästchen addiert, erhält man also die Summe der ungeraden Zahlen. Das Exponat ermöglicht sogar, dass der Betrachter nicht selber rechnen, sondern nur zusammenlegen muss. Denn die L-förmigen Teile passen zusammen und ergeben, in der richtigen Reihenfolge (man darf keine Lücken lassen), jeweils ein Quadrat. Für jedes hinzugenommene Teil (entspricht einem weiteren Summanden beim Addieren) wächst das Quadrat um eine Kästchenlänge in jede Richtung. Genauer gesagt: Wenn man das Teil der Größe $2n-1$ hinzunimmt, dann erhält man ein zusammengelegtes Quadrat mit Kantenlänge $n$, also $n^2$ Kästchen groß. Damit kommt man zu der Formel

$$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$$

# Die Beweise durch vollständige Induktion:

### Die Summe der ungeraden Zahlen

*Behauptung:*

$$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$$

*Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist offensichtlich

$$\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = 1$$

und außerdem

$$n^2 = 1.$$

Also stimmt die Vermutung für $n = 1$. Nun wird davon ausgegangen, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$$

gilt. Damit soll jetzt gezeigt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i - 1) = (n + 1)^2$$

gilt.

*Induktionsschritt:* Hier werden zunächst die Grenzen der Summation so verschoben, dass dann die Annahme eingesetzt werden kann. Nun wird umgeformt und die binomische Formel angewandt, so dass das gewünschte Ergebnis erhalten wird:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = 2(n+1)-1+\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2(n+1)-1+n^2 = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

### Summe n

Zu dieser Aufgabe gibt es eine Anekdote aus den Schulzeiten von Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Im „Spektrum der Wissenschaft Spezial“, 2/2009, wird berichtet: „Über den neunjährigen Gauss wird erzählt, dass er in kürzester Zeit mit einer Rechenaufgabe fertig ist, die sein Lehrer Büttner der Klasse aufgetragen hat: $1+2+3+...+100 = 5050$. Seine Überlegung ist: Von „außen“ nach „innen“ vorgehend, fasst er jeweils die kleinste und die größte Zahl zu einer Summe zusammen:

$1+100, 2+99, 3+98, ..., 50+51$. Das ergibt 50-mal die Summe 101... Lehrer Büttner spürt, dass er diesem Jungen nicht wirklich etwas beibringen kann und schenkt ihm ein Schulbuch über Arithmetik, das sich dieser selbstständig erarbeitet."
Das ist nicht die gleiche Herangehensweise wie sie im Exponat gezeigt wurde, aber auch diese Geschichte macht deutlich, dass man mit systematischem Überlegen schneller und weiter kommt als mit einfachen „Drauflosrechnen". Das Ergebnis ist aber das gleiche: Auch Gauss erhält (für den Fall $n = 100$):

$$50 \cdot 101 = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Behauptung:*

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist offensichtlich

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1$$

und außerdem

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1.$$

Also stimmt die Vermutung für $n = 1$. Nun wird davon ausgegangen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. Damit soll jetzt gezeigt werden, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

gilt.

*Induktionsschritt:* Hier wird zunächst die oberen Grenze des Summenzeichens so verschoben, dass dann die Annahme eingesetzt werden kann. Anschließend wird umgeformt und ausgeklammert, so dass das gewünschte Ergebnis entsteht:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \\ &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$
$$= \frac{(2+n)(n+1)}{2}$$

**Summe der Quadratzahlen**

*Behauptung:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

*Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist offensichtlich

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1$$

und außerdem

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1.$$

Also stimmt die Vermutung für $n = 1$. Nun wird davon ausgegangen, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

gilt.

*Induktionsschritt:* Hier werden zunächst die oberen Grenzen der Summation so verschoben, dass dann die Gleichung der Annahme eingesetzt werden kann. Dann wird umgeformt, ausgeklammert und wieder zusammengefasst, so dass das gewünschte Ergebnis erhalten wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= (n+1)^2 + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
&= \frac{6 \cdot (n+1)^2 + n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (6 \cdot (n+1) + n \cdot (2n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (6n + 6 + 2n^2 + n)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}
\end{aligned}$$